

有限および微小変形有限要素解析による粘土の
定ひずみ速度圧密試験のシミュレーション

Large and Small Strain FE Analyses of CRS Consolidation Tests of Soft Marine Clays

清水正喜 Masayoshi SHIMIZU (鳥取大学工学部)

定ひずみ速度圧密試験の結果から用いた試料の構成関係を求める現行の方法は、微小変形の仮定を設けて立てられた支配方程式の理論解に基づいている。微小変形の仮定の影響を調べるために、微小変形の仮定を設けたときと設けなかったときの挙動を有限要素解析を通して比較した。有限変形解析時に見られる挙動は微小変形解析では再現することができないこと、従って微小変形理論に基づいて決定される試料の構成関係はその試料の真の構成関係とは異なったものである可能性がある、ことを指摘した。

キーワード: 圧密, 定ひずみ速度圧密試験, 粘土, 有限要素解析, 有限変形, 微小変形 (IGC: D-5)

1. 序論

通常の定ひずみ速度圧密試験では鉛直荷重, 鉛直変位, 底面間隙水圧を測定する。これらのデータを解析することによって圧縮・圧密特性すなわち試料の構成関係を決定することができる。(以後, 構成関係を決定するための方法を結果の整理法と呼ぶ)

定ひずみ速度圧密試験にはいくつかの欠点がある。どの結果の整理法も支配方程式の理論解に基づいているので, 支配方程式の定式化に際して設けられた仮定の影響を含むことになる。さらに, 結果の整理法自体にも幾つかの仮定が設けられているので, やはり, その影響を受けることになる。

しかし, 試料の真の構成関係は未知であるから, 用いた結果の整理法の妥当性を評価することは困難になる。結果の整理法の妥当性を評価する一つの方法として, 著者²⁾は次の方法を採用した: 構成関係を仮定したモデルに対して数値解析によって定ひずみ速度圧密試験を行い(即ち, 定ひずみ速度圧密試験の数値シミュレーションを行い), 得られた試験(シミュレーシ

ョン)結果に対して結果の整理法を適用して, 求められた構成関係と仮定した構成関係とを比較する。この方法によって, 代表的な結果の整理法である Wissa 等の方法³⁾の妥当性を検討した。ちなみに, この整理法は, わが国の地盤工学会⁴⁾や米国の材料学会 (ASTM) の基準⁵⁾の基礎になっている。

数値シミュレーションのためには, 実際の土をどのようにモデル化するか, また定ひずみ速度圧密試験をどのように解析するか, が重要な問題である。前者の問題ではモデルの構成関係ができるだけ実際の土の挙動を表現できる方が好ましい。後者の問題では定ひずみ速度圧密試験時の試料の変形が微小ではなく有限であることを考慮する必要がある, 有限要素解析は有限変形理論に基づいて行われるべきである。有限ひずみの重要性は特に軟弱な粘土に対して影響が大であると予想できる。

これまで多くの結果の整理法が提案されているが^{3), 6)-10)}, その中で最も普及している Wissa らの方法³⁾は微小変形理論に基礎を置いている。

本研究の目的は, 微小変形の仮定を設けて定ひずみ

*本論文は先に発表した論文¹⁾の内容を一部加筆・修正したものである。

速度圧密試験時の挙動を理論的または数値的に予測または理解するときの、その仮定の影響を調べることである。この目的のために、微小変形有限要素解析と有限変形有限要素解析によって数値シミュレーションを行い、挙動を比較した。土の構成モデルとして、圧密係数 c_v と体積圧縮係数 m_v が一定のモデル、 c_v は一定であるが m_v は一定でないもの、および c_v も m_v も一定でないものの3種類の構成モデルを設定した。

本論文では、はじめにシミュレーションの方法と結果を示す。次に微小変形の仮定の下で得られたシミュレーション結果と有限変形解析によって得られたシミュレーション結果を比較し、微小変形の仮定がシミュレーションの結果に及ぼす影響について考察する。さらに、シミュレーションの結果を Wissa らの微小変形理論解による予測と比較する。主要な結論として、微小変形を仮定すると、仮定しない場合とまったく異なった挙動が現れること、さらに圧密に関する性質を決定する上で体積圧縮係数を一定と仮定すべきではないことを示す。

2. 支配方程式

飽和土の圧密現象は

- 1) 土に対する応力の釣りあい式
- 2) 土粒子および間隙水に対する質量の平衡式
- 3) ダルシーの式
- 4) 土の構成式

によって支配される。応力の釣り合い式は、加速度が無視できると仮定したときの土（土粒子と間隙水の混合体）の運動方程式である。質量の平衡式は土粒子と間隙水の各々の質量が保存されることを表す。ダルシーの式は、間隙水の運動方程式に相当する。土の構成式は有効応力とひずみの関係である。

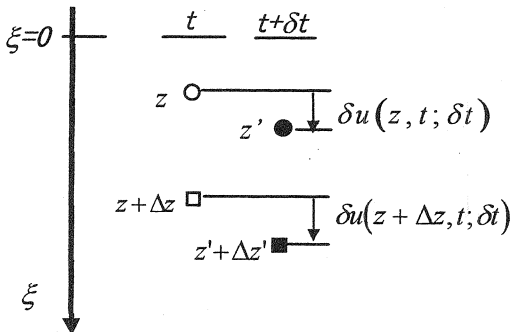


図1：土粒子の運動

支配方程式の導出と有限要素解析のための定式化は清水¹¹⁾に詳述しているの、ここでは、導かれた式のみを示す。尚、有限要素解析のための定式化は重み付き残差法によった。

1次元変形問題を扱う、即ち、水粒子および土粒子は鉛直方向にのみ運動すると仮定する。ある時刻 (τ) における任意の粒子の位置を、空間に固定した点からの鉛直下向きの距離 (ξ) で測る。図1に、 $\tau=t$ に $\xi=z$ および $z+\Delta z$ にある2個の土粒子が $\tau=t'$ ($=t+\delta t$) に $\xi=z'$ および $z'+\Delta z'$ にそれぞれ移動したときの様子を模式的に示した。本研究で採用した運動および変形の記述方法を付録1に示す。

(1) 応力の釣り合い式

時刻 $\tau=t$ および t' において微小土要素に作用する力の釣り合いを考えることによって、次式の応力の釣り合い式の増分形を得る：

$$\frac{\partial \delta \sigma}{\partial z} - (b + \delta b)(1 - \delta \varepsilon) + b = 0 \tag{1}$$

ここに σ は全応力、 ε はひずみ、 b は物体力を表し、 $\delta \sigma$ 、 $\delta \varepsilon$ 、 δb はそれらの物質時間増分で、以下の式で表される：

$$\delta \sigma = \sigma(z', t + \delta t) - \sigma(z, t) \tag{2}$$

$$\delta \varepsilon = - \frac{\partial \delta u}{\partial z} \tag{3}$$

$$\delta b = b(z', t + \delta t) - b(z, t) \tag{4}$$

ただし、 δu は変位増分。また土の密度を ρ とすると

$$b(z, t) = \rho(z, t)g \tag{5}$$

変形が微小で

$$\delta \varepsilon \ll 1 \tag{6}$$

と仮定できる場合には式(1)は

$$\frac{\partial \delta \sigma}{\partial z} - \delta b = 0 \tag{7}$$

となる。

本研究では、有限変形解析には式(1)を用いた。一方、微小変形解析では式(7)を用いた。ただし、その場合、 $\delta \sigma$ や δb は物質時間増分でなく単なる時間増分として扱われる、即ち

$$\delta\sigma = \sigma(z, t + \delta t) - \sigma(z, t) \quad (2')$$

$$\delta b = b(z, t + \delta t) - b(z, t) \quad (4')$$

後述の構成関係を考慮することによって式(1)または(7)は変位増分 (δu) と間隙水圧増分 (δp) を未知量とする微分方程式になる。

(2) 質量の平衡式

飽和土は固体の土粒子と液体の間隙水で構成されているが、これらの相の運動は異なっている。このことを考慮して質量の平衡則を導くと次の式が得られる(11), 12) :

$$n \frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} + (1-n) \frac{\dot{\rho}_s}{\rho_s} + \frac{\partial(nv_r)}{\partial z} + \frac{\partial v_s}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

ここに

n : 間隙率

ρ_w : 間隙水の密度

ρ_s : 土粒子の密度

v_r : 間隙水の、土粒子に対する相対速度

土粒子の非圧縮性を仮定すると

$$n \frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} + \frac{\partial(nv_r)}{\partial z} + \frac{\partial v_s}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

さらに間隙水の非圧縮性を仮定すると

$$\frac{\partial(nv_r)}{\partial z} + \frac{\partial v_s}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

式(10)は変形し得る土骨格の中の非圧縮性流体の浸透問題において通常用いられる質量平衡の式(連続の式)である。本研究では、この式を微小変形解析に用いた。これは、微小変形圧密理論に基づいた Wissa 等の研究において間隙水の非圧縮性が仮定されているからである。一方、有限変形解析には、間隙水の非圧縮性を仮定しない式(9)を用いた。尚、著者¹³⁾は間隙水の圧縮性を考慮することによる利点の一例を、波による海底砂地盤内の間隙水圧上昇の問題を通して明らかにしている。

質量の平衡式は、ダルシーの式を考慮することによって、間隙水圧増分および変位増分を未知量とする微分方程式に変換される。勿論、間隙水の圧縮性を考慮する場合には、その圧縮特性(間隙水の構成式、すなわち、間隙水の密度と間隙水圧の関係)も考慮する。

変換された微分方程式は、力の平衡のための微分方程式と連立させて解く。

(3) 間隙水の圧縮特性

間隙水の密度 (ρ_w) と間隙水圧 (p) の関係は

$$\frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} = \beta \dot{p} \quad (11)$$

で与えられる。ここに、 β は間隙水の体積圧縮係数であり、ほぼ一定である。本研究では $\beta=5 \times 10^{-10} \text{ N/m}^2$ の値を用いた¹⁴⁾。

(4) ダルシーの法則

間隙水の運動は次のダルシーの式に従うと仮定する :

$$mv_r = -k \left(-1 + \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (12)$$

ここに、 k は透水係数。上式を導くに当たり、 ρ_w が z の関数であることを考慮したが、多くの実際問題においては $1-\beta p \approx 1$ であると仮定できる¹¹⁾ので、得られた式は通常用いられているものと一致している。

(5) 土の構成式

土の構成関係は、ひずみ速度と有効応力速度の関係 :

$$\dot{\epsilon} = m_v \dot{\sigma}', \quad (13)$$

によって表すことができる。ここに、 σ' は有効応力で

$$\sigma' = \sigma - p \quad (14)$$

構成関係の非線型性は体積圧縮係数 m_v が一定でないことによつて表される。 m_v は間隙比 (e) と有効応力 (σ') との関係から評価でき、 σ' または e の関数である。

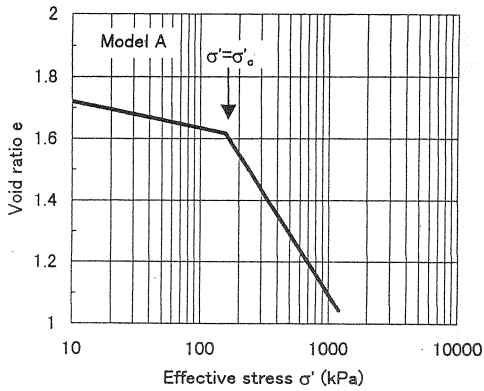
3. 数値シミュレーションの方法

3.1 構成モデル

三つのタイプの構成関係を仮定した。それぞれモデルA、モデルB、モデルCと呼ぶ。モデルAは現実的なモデルであり、体積圧縮係数 (m_v) および圧密係数 (c_v) が有効応力によつて変化する。モデルBとモデルCは仮想的なモデルである : モデルBでは、 c_v は一定であるが m_v は σ' の関数であると仮定されている ; モデルCは m_v も c_v も一定のモデルである。以下に各モデルの詳細を述べる :

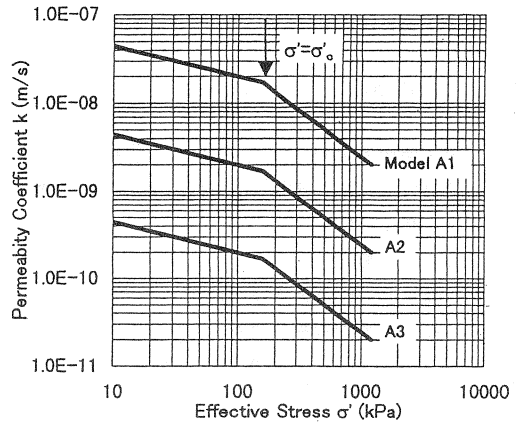
(1) モデルA

正規圧密領域と過圧密領域の各々に対して e と σ' の対

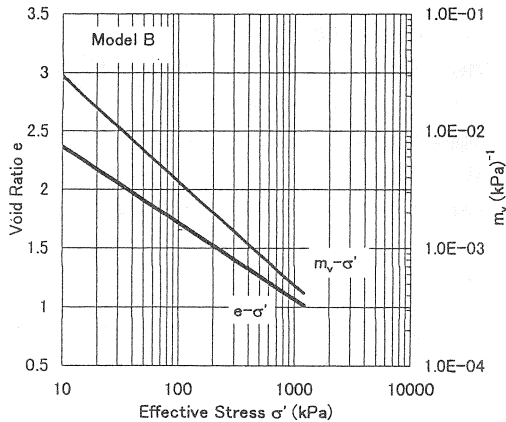


(a) $e - \log \sigma'$ 関係

図2：構成モデルAの性質。

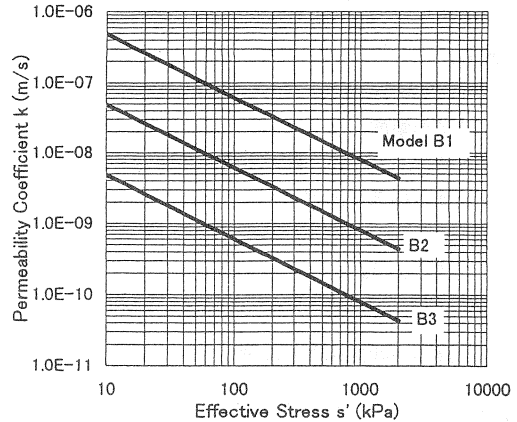


(b) $\log k - \log \sigma'$ 関係



(a) $e - \log \sigma'$ 関係

図3：構成モデルBの性質。；



(b) $\log k - \log \sigma'$ 関係。

数との直線関係が成り立つと仮定；従って m_v は有効応力に依存する。透水係数 (k) に関しては、 k と σ' が両対数紙上で直線と仮定し、その傾きが正規圧密と過圧密の領域で異なる。図2参照。なお、このモデルでは正規圧密領域と過圧密領域の各々において $e - \log k$ 関係は直線的になる。

(2) モデルB

このモデルは c_v は一定であるが m_v は一定でないという性質をもつ。この性質は Wissa らによって用いられた支配方程式において考慮された条件と同じである。しかし、Wissa らの結果の整理法においては m_v が鉛直方向で一定と仮定されていることに注意したい。このモデルの数値試験時の挙動は Wissa らの結果の整理法を評価するために用いる。モデルAの正規圧密状態に対

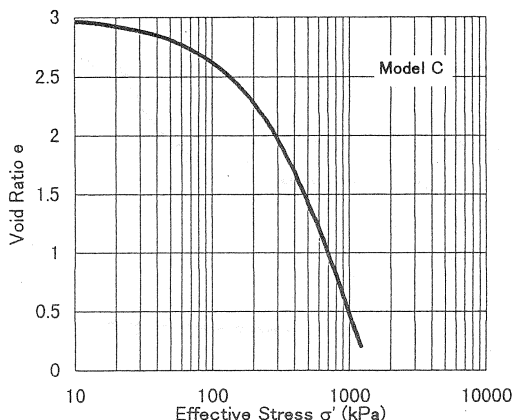
して仮定された $e - \log \sigma'$ の関係と同じ関係を仮定した。従って、 k は σ' の関数になる。図3参照。

(3) モデルC

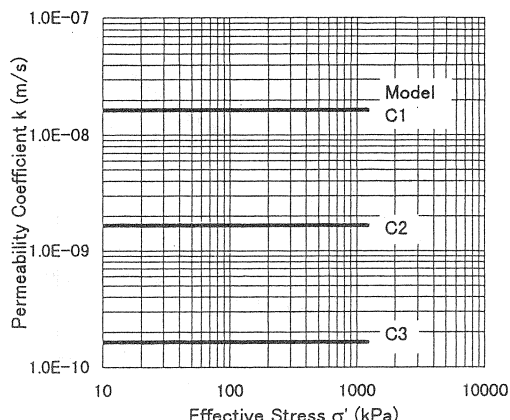
このモデルでは m_v も c_v も一定、従って k も一定である。 c_v 一定の仮定は Wissa らが用いた支配方程式で設けられた。 m_v 一定の仮定は彼らの結果の整理法で設定された条件の十分条件になる。図4参照。

3.2 有限要素解析の方法

図5に有限要素解析で使用した有限要素を示す。変位増分は位置の変数の2次関数で、間隙水圧増分は一次関数でそれぞれ近似した。数値積分は、正規化した基準要素で行った；実空間の要素から基準要素への変換は一次関数によった；従って、間隙水圧増分に関して



(a) $e - \log \sigma'$ 関係



(b) $\log k - \log \sigma'$ 関係.

図4: 構成モデルCの性質. ;

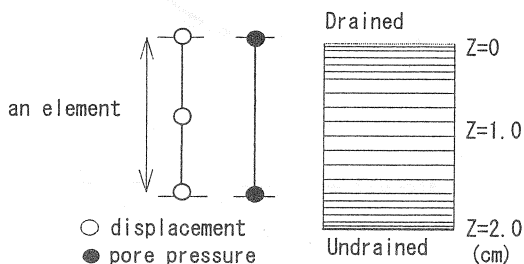


図5: 用いた有限要素と, 変位および間隙水圧の節点.

はアイソパラメトリック (isoparametric) であり, 変位増分に関してはサブパラメトリック (sub-parametric) である¹⁵⁾.

各構成モデルに対して, 3種類の圧縮速度 $r=0.003, 0.03, \text{および } 0.3\%/min$ で定ひずみ速度圧密試験を解析した.

微小変形解析においても構成関係が非線形であるので, また有限変形解析においてはいわゆる支配方程式の幾何学的非線形性があるので, 反復計算が必要である. 次の関係が満たされるまで反復計算を行った.

$$\frac{\sum [R(i)^2 - R_0(i)^2]}{\sum R_0(i)^2} \leq 10^{-10}. \quad (15)$$

ここに $R(i)$ と $R_0(i)$ ($i=1, 2, \dots, N$; N は自由度の総数) はそれぞれ現段階および前段階での解.

4. 数値シミュレーションの結果

数値シミュレーションでは仮定した構成関係が充足さ

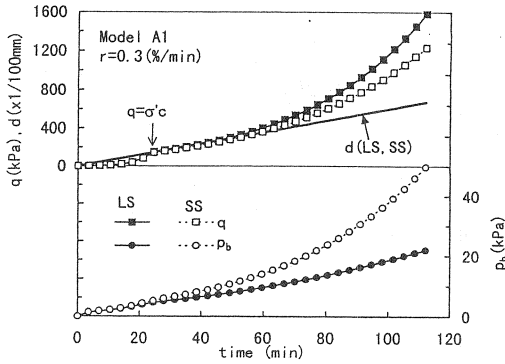
れなければならない. これは構成関係が非線形るとき反復計算によって満たされる. 本研究で用いたプログラムのアルゴリズムによって, 構成関係は高い精度で充足されることを既に確認している²⁾.

数値シミュレーションの結果を図6から8に示す. 通常定ひずみ速度圧密試験において計測される, 鉛直変位 (d), 単位面積あたりの鉛直荷重 (q) および供試体底面間隙水圧 (p_b) を時間に対して示した. それらの図では, 微小変形解析 (SS と記す) の結果を有限変形解析 (LS) の結果と比較している. すべての図において定められた圧縮速度で圧縮されていることをまず確認できる.

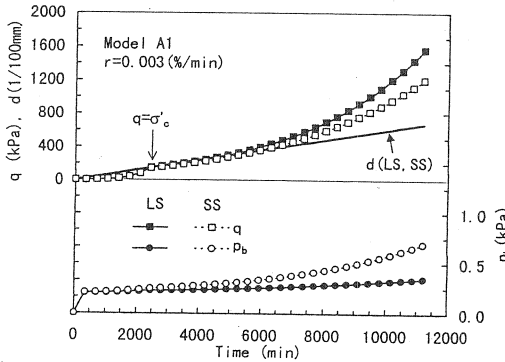
(1) モデルA

このモデルでは, 過圧密から正規圧密状態へ移行するときの有効応力 $\sigma'=\sigma'_e$ において圧縮性が急激に変化する (図2 (a)参照) が, このことが図6 (a), (b) に示した結果に反映されている, すなわち q と p_b の挙動が $\sigma'=\sigma'_e$ において変化している. さらに以下の現象を観察できる:

- 1) 荷重 q は, 微小変形解析のときに大変形解析のときより小さい.
- 2) 間隙水圧 p_b は微小変形解析のときに大変形解析のときより大きく生じる.
- 3) 微小変形解析のときには p_b は, 調べた圧縮速度の範囲では決して一定にならない. 一方, 大変形解析の場合には, 圧縮速度が非常に小さいとき, 例えば $r=0.003 (\%/min)$ のときに, p_b は一定値に落ち着く傾向がある. (ただし, この速度は鉛直荷重が 1200kPa 以上に達するのに 10000 分 (約 1 週間) 以上かかるような非現実



(a) $r=0.3$ (%/min)



(b) $r=0.003$ (%/min)

図6：モデルA1のシミュレーションの結果

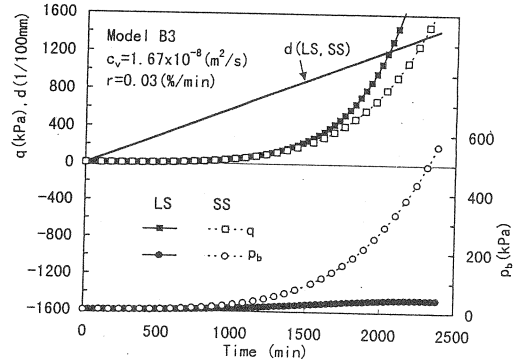
的な遅い速度であることに注意したい。)

大変形解析においては供試体の厚さの変化が考慮されるが、微小変形解析では考慮されない。圧縮の進行に伴って排水距離が減少し、上記 2) の現象が生じたと考えられる。また、上記 1) の現象は次のように説明できる。微小変形解析では時間の経過に伴って節点の座標を更新しないので、要素のひずみは常に過小に評価され、対応する有効応力も小さく評価される。荷重 q が供試体上面での有効応力であることを考えると、微小変形解析の場合に有限変形解析に比べて荷重 q が小さくなると言える。

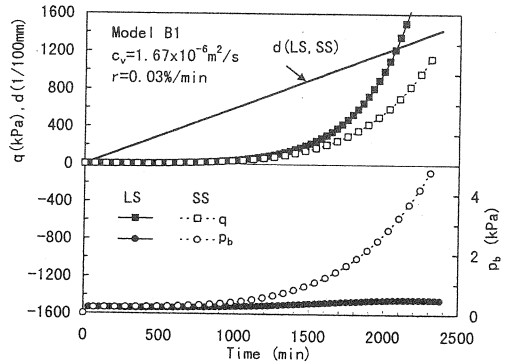
(2) モデルB

このモデルは過圧密されていない (図3 (a)参照) ので、特に圧縮の初期において q は大きくなる。この点を除いて、モデルAで観察されたのと同じ挙動が見られる (図7 (a), (b))。ここで強調したいことは、微小変形解析においても大変形解析においても圧縮速度が非常に小さくても p_b が一定に近づく傾向がみられないことである。

(3) モデルC



(a) モデルB3;



(b) モデルB1

図7：モデルBのCRS圧密試験シミュレーションの結果。

このモデルは微小変形圧密理論において仮定されたのと同じ性質が仮定されている。モデルAの結果に対して指摘した現象 1) と 2) がこのモデルに対しても見られる。しかし、現象 3) は見られない、即ち、 p_b は微小変形解析の場合圧縮開始後すぐに一定になるが、大変形解析のときには減少していく。また、この挙動は圧縮速度に依存しない。

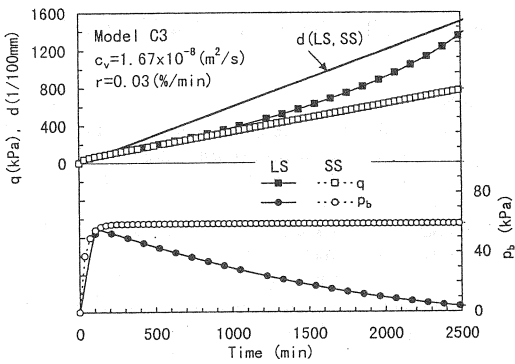
また、大変形解析において p_b は時間と共に減少する。これは、調べた圧縮速度の範囲では、供試体厚さの減少の効果が大きいことを示す。

5. 考察

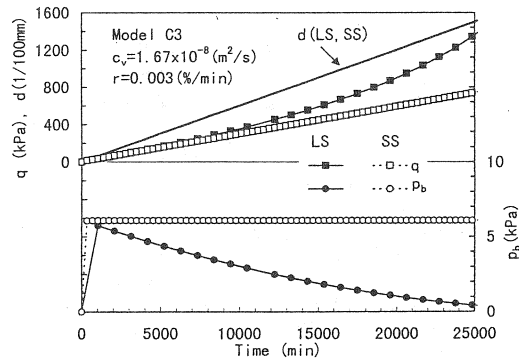
5.1 定常状態理論の適用性

モデルBもモデルCも圧密係数は一定であると仮定されている。しかし、前節で示したように、モデルBの挙動はモデルCの挙動と異なっている。この理由について微小変形理論を用いて考察する。

Wissa ら³⁾が用いた支配方程式は次の仮定と共に Mikasa¹⁶⁾によって導かれた：



(a) $r=0.03$ (%/min)



(b) $r=0.003$ (%/min)

図8：モデルC3に対するCRS圧密試験のシミュレーション結果

- 1) 材料の物体力（重さ）は無視できる；
- 2) ひずみは微小である；
- 3) 圧密係数は任意の時間で鉛直方向で一定である。

Wissaらが提案した結果の整理法の中でも、次の仮定を設けることによって立てられた手法が多く、の基準で用いられている：

- 4) 体積圧縮係数は高さ方向で一定である
- 5) 定常状態が達せられる

以上すべての仮定は、試料が本来有している性質と決定された性質との不一致を生み出すことになる。ここでは仮定2)、3)、4)および5)について調べる。仮定1)の影響は定ひずみ速度圧密試験では無視できるほど小さい。

図9は、供試体上面、中央、および底面でのひずみを時間係数 (T_v) に対して表した理論的關係である。ただし、ひずみは供試体高さ (H)、圧密係数 (c_v) および圧縮速度 (r) によって無次元化している。この図から、どの位置においてもひずみの時間的变化は一定になる傾向があることがわかる。ひずみの時間的变化が

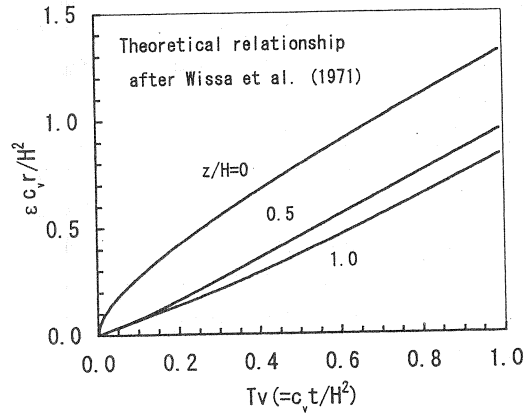


図9：無次元化したひずみと時間係数の理論的關係。

一定になるような状態が定常状態である（付録2参照）。

定常状態では、次式で示すように、供試体上面のひずみと底面のひずみの差が時間に無関係に一定になる：

$$\varepsilon(x=0, T_v) - \varepsilon(x=H, T_v) = \frac{1}{2} \frac{H^2}{c_v} r. \quad (16)$$

また、次式からわかるように、定常状態では、体積圧縮係数 m_v が一定の場合に限って、供試体上面の有効応力と底面に有効応力の差も一定になる：

$$p_b = \sigma'(x=0, T_v) - \sigma'(x=H, T_v) = \frac{1}{m_v} \frac{1}{2} \frac{H^2}{c_v} r. \quad (17)$$

この有効応力の差は底面間隙水圧 p_b に等しい、従って、定常状態では p_b が一定になる。

一方、 m_v が一定でなければ、即ち、多くの土でみられるように、 m_v が有効応力の関数であるならば、 p_b は、たとえ定常状態であっても、一定にはならない。

図7(a)と(b)で示したように、モデルBは微小変形解析において p_b が一定にならない。これはこのモデルの体積圧縮係数が一定でないからである。これより、 m_v が一定でない土では、たとえ c_v が一定であっても、 p_b は定常状態において決して一定にはならない。

5.2 微小ひずみ理論の適用性

図6から8で見たように、大変形解析による挙動と微小変形解析による挙動が似ているのは平均ひずみが20-30%までである。平均ひずみのこの範囲では鉛直荷重 q は実務的に要求される大きさまで達していないこ

とに注意すべきである。換言すると、微小変形解析によってシミュレートされた挙動は、実際の目的に必要な圧密圧力の範囲では、有限変形解析による挙動と全く異なる。

最も重要なことは、大変形解析では、底面間隙水圧が一定になるという定常状態は c_v も m_v も一定であるような土に対しても生じない(図8)、という点である。定ひずみ速度圧密試験によって生じるひずみが微小でないことを考慮すれば微小ひずみ理論に基づく限り試料の真の性質とは異なった性質が決定されてしまうと想像できる。

6. 結論

- (1) 微小ひずみの仮定を設けても、 m_v が一定でない土では、定常状態において底面間隙水圧は一定にならない。
- (2) 大変形解析において現れる挙動は平均ひずみが20%を越える場合には微小変形解析によって表すことができない。逆にいえば、平均ひずみが20%を越えない場合にのみ、微小変形解析によって大変形解析において現れる挙動が表せる。ただし、そのような平均ひずみの範囲では、圧密圧力は実際目的に対して必要とされる大きさに達しない。
- (3) 微小変形理論によって決定される圧密に関する性質は試料の真の性質とは異なる。

本研究で対象にした土(仮定したような構成関係を有する土)では、平均ひずみが20%を超えると有限変形解析時の挙動と微小変形解析時の挙動が異なってくる。定ひずみ速度圧密試験に供される試料は層厚を変化させながら圧密しているのであるから、実際の試験結果には必ずその効果が含まれている。従って、試験結果から試料の圧密性質を決定するためには当然有限変形圧密理論を用いなければならない。しかし、実際問題として、定ひずみ速度圧密試験結果から試料の圧密性質を決定する上で現状では微小変形圧密理論を用いて圧密性質を決定することが行われている。これは単に簡便さを目的としているだけでなく、有限変形圧密理論に基づいて試料の圧密性質を決定するための有効な方法が確立していないためである。今後の研究が必要である。

謝辞

数値解析は、鳥取大学大学院修士課程、榎原隆宏氏(現(株)竹中土木)の労によるところが大である。本研究

は文部省科学研究費基盤研究(c)(2)(課題番号08650578)の補助を受けた。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Shimizu, M. (1997): Large and small strain FE analyses of CRS consolidation tests of soft marine clays, Proc. of the Sixth Int. Offshore and Polar Engineering Conf., Vol.1, pp.424-430
- 2) Shimizu, M., Nrahara, T. and Umetani, A. (1995): Scrutiny of a method for determining consolidation properties from CRS consolidation tests, Proc. of the Int. Symposium on Compression and Consolidation of Clayey Soils, IS-Hiroshima, Vol.1, pp.555-560
- 3) Wissa, A.E.Z., Christian, J.T., Davis, E.H. and Heiberg, S. (1971): Consolidation at constant rate of strain, J. Soil Mech. and Found. Division, Proc. ASCE, Vol.97, SM10, pp.1393-1413.
- 4) 定ひずみ速度圧密試験方法基準化委員会編(1995): 土の定ひずみ速度圧密試験方法(JSF T 412-1993), 新制定土質工学会基準・同解説(1994年度版), 地盤工学会
- 5) ASTM (1991): D4186-89: Standard test method for one-dimensional consolidation properties of soils using controlled-strain loading, Annual Book of ASTM Standards, Vol.04.08, pp.565-569
- 6) Smith, R. E. and Wahls, H. E. (1969): Consolidation under constant rates of strain, J. Soil Mech. and Found. Division, Proc. ASCE, Vol.95, SM2, pp.519-539.
- 7) Gorman, C. T. (1981): Strain-rate selection in the constant-rate-of-strain consolidation test, Kentucky Transportation Research Program, Research Report UKTRP-81-7, pp.1-16.
- 8) Lee, K. (1981): Consolidation with constant rate of deformation, Geotechnique, Vol.31, pp.215-229
- 9) Zen, K. and Umehara, Y. (1986): A new consolidation testing procedure and technique for very soft soils, Consolidation of soils: Testing and evaluation, ASTM STP 892, pp.405-432.
- 10) Znidarcic, D., Schiffman, R. L., Pane, V., Croce, P., Ko, H.-Y., and Olsen, H. W. (1986): The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays: part V, constant rate of deformation testing and analysis, Geotechnique, Vol.36, pp.227-237.
- 11) Shimizu, M. (1994): Formulation for finite deformation FE analysis of one-dimensional consolidation of saturated soils, Report of Faculty of Engineering, Tottori University, Vol.25. 187-198
- 12) 清水正喜(1997): 飽和土の質量平衡式の混合体理論による定式化, 地盤工学会中国支部論文報告集, 地盤と建設, Vol.15, No.1 (印刷中)
- 13) 清水正喜(1994): 海底砂質土地盤の波による液状化一簡易理論の定式化と解析解一, 地盤工学会中国支部論文報告集, 地盤と建設, Vol.12, No.1, pp.12-23.
- 14) 土木学会水理公式集改定委員会編(1985): 水理公式集, 土木学会
- 15) Dhatt, G. and Touzot, G. (1983): Finite Element Displayed, John Wiley & Sons.
- 16) Mikasa, M. (1965): Discussion, Proc. of 6th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Eng., Vol.3, pp.459-

460.

付録1

粒子を基準時間 ($\tau=t_0$) における位置 ($\xi=Z$) で識別する。粒子 Z が $\tau=t$ において $\xi=z$ に移るとすると、その粒子の運動は

$$z = {}_{t_0}\chi(Z, t) \quad (A1)$$

と記述できる。ここに

$$Z = {}_{t_0}\chi(Z, t_0) \quad (A2)$$

現在の時刻 t を基準時間として選べば、 $\tau=t'$ ($=t+\delta t$) において $\xi=z'$ にある粒子の運動は

$$z' = {}_t\chi(z, t') \quad (A3)$$

ここに

$$z = {}_t\chi(z, t) \quad (A4)$$

式(A1)から(A4)に従って運動している粒子 (Z) を考える。この粒子に付随した物理量 (または力学量) ϕ の、時間増分 δt 間の変化量を $\delta\phi$ と記す、即ち

$$\delta\phi \equiv \tilde{\phi}(Z, t') - \tilde{\phi}(Z, t) \quad (A5)$$

または空間記述では、

$$\delta\phi \equiv \phi(z', t') - \phi(z, t). \quad (A6)$$

式(A3)より

$$\delta\phi = \phi({}_t\chi(z, t'), t') - \phi(z, t) \quad (A7)$$

このように $\delta\phi$ は、時刻 t 、その時の位置 z および時間増分 δt の関数である。

変位増分を次式：

$$\delta u(z, t; \delta t) \equiv z' - z = {}_t\chi(z, t') - {}_t\chi(z, t) \quad (A8)$$

で定義すると、ひずみ増分は

$$\delta\varepsilon(z, t; \delta t) \equiv -\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\delta u(z + \Delta z, t; \delta t) - \delta u(z, t; \delta t)}{\Delta z} = -\frac{\partial \delta u}{\partial z} \quad (A9)$$

また土粒子の速度は

$$v_s(z, t) \equiv \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta u(z, t; \delta t)}{\delta t} \quad (A10)$$

で与えられる。これらの定義によってひずみ速度は速度と次の式で関係づけられる：

$$\dot{\varepsilon}(z, t) \equiv \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\varepsilon(z, t; \delta t)}{\delta t} = -\frac{\partial v_s(z, t)}{\partial z} \quad (A11)$$

付録2

Wissa et al. ³⁾による解では、ひずみが時間係数 T_v と空間変数 X の関数として与えられている：

$$\varepsilon(X, T_v) = \frac{H^2 r}{c_v} [T_v + f(X) + g(X, T_v)] \quad (A12)$$

ただし

$$f(X) = \left\{ \frac{1}{3} - X + \frac{1}{2} X^2 \right\} \quad (A13)$$

$$g(X, T_v) = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(n\pi X)}{n^2} \cdot \exp(-n^2 \pi T_v) \right] \quad (A14)$$

ここに

H : 供試体の高さ

X : 無次元化された空間変数 ($=z/H$; 供試体上面が $z=0$, 供試体底面が $z=H$);

r : 圧縮速度;

c_v : 圧密係数 ($=k/m_v \rho_w g$);

T_v : 時間係数 ($=c_v t/H^2$).

数学的特性として最後の項 $g(X, T_v)$ は十分大きな時間係数の値に対して0になる。そのような、 $g=0$ になる状態は‘定常状態’と呼ばれている。