地盤と建設
Vol.15, No.1, 1997

飽和土の質量平衡式の混合体理論による定式化

Mixture-theory-based formulation for mass balance in saturated soils

清水正喜　Masayoshi SHIMIZU　（鳥取大学工学部）

混合体理論に基づいて飽和土の質量平衡式を定式化した．土粒子と間隙水の間で質量のやり取りがないことを前提にして，土粒子と間隙水の圧縮性，および変形が有限であることを考慮した．得られた式に対して，土粒子と間隙水の非圧縮性の仮定や微小変形の仮定を設けた場合の式の変化を示した．

キーワード：飽和土，質量平衡，連続の式，混合体，有限変形 (IGC:E0)

1．序論

現行の土質力学は連続体力学に基礎を置いている．土粒子と間隙水の物理的性質は著しく異なっているので，土が外力を受けて運動や変形をするときの両者の挙動も全く異なったものとなる．物理的・力学的性質の異なる複数の相から構成された物質に対して連続体の力学を応用する理論体系を混合体理論[1),2)]という．

連続体力学の前提である連続性の概念は混合体理論においても適用される．混合体における連続性の概念は次のように解釈できる．

飽和した土は土粒子と間隙水の混合体である．1個の土粒子を考えると，その土粒子が占める領域には間隙水は存在しない．逆も言える．つまり，土粒子や間隙水は空間に離散的に分布している．従ってそれらの粒子に付随した物理・力学量は空間変数（空間の位置を表す変数）の連続関数ではない．しかし，連続体力学では離散した物質をあたかも連続した状態で存在するように仮定して，物質に付随した物理・力学量を空間変数の連続関数として扱う．そのような連続性を土粒子と間隙水の両者に対して仮定すると，空間の同じ位置に土粒子と間隙水が混在することになる．混合体理論はこのことを前提としている．

そのような物理的に考えると矛盾した概念は，空間の位置を表す「点」を有限ではあるが極めて微小な領域を表すものと解釈することによって，感覚的に解消できる．逆にいえば，空間のある微小領域に存在する複数の土粒子と間隙水の集合が数学的には空間の「点」として扱われる．

飽和土の圧密現象を解くためには飽和土を構成している土粒子と間隙水の質量平衡則を満足させなければならない．本研究は，従来の圧密理論や圧密数値解析において用いられた質量平衡式を見直し，そこに含まれた仮定を整理する目的で行った．本研究ノートでは，まず，飽和土の質量平衡式を混合体理論に基づいてできる限り厳密に定式化する．次いで，土粒子の非圧縮性，間隙水の非圧縮性，さらに微小変形を仮定することによる式の変化を調べる．

2．定式化

2．1　運動

土粒子と間隙水の物理的および力学的性質は全く異なっているので，それらの性質を表すための諸量を土粒子と間隙水とで明確に区別する必要がある．土粒子に付随した量に添え字‘s’を，間隙水に付随した量に‘w’を付す．

土粒子と間隙水の運動の仕方が異なるので，それらの運動を別々の式で表す：

$$\mathbf{x}=\chi_s(\mathbf{X},t)\ ;\quad \mathbf{x}=\chi_w(\mathbf{X},t) \tag{1}$$

式(1)は基準形態において位置$\mathbf{X}$にあった土粒子または間隙水が現在形態において位置 $\mathbf{x}$ にあることを表している．両式において，右辺の $\mathbf{X}$ の値が異なっていて左辺の $\mathbf{x}$ の値が同じである場合は，基準形態において異なった位置にあった土粒子と間隙水が現在形態において同じ位置にあることを表し，逆に，右辺の $\mathbf{X}$ の値が同じで左辺の $\mathbf{x}$ の値が異なっている場合には，基準形態において同じ位置にあった土粒子と間隙水が現在形態において異なった位置にあることを表す（図１参照）．

また，各々の式において $\mathbf{x}$ と $\mathbf{X}$ は１対１に対応している．これは，式(1)の第１式を例にとると，基準形態において異なった位置（例えば $\mathbf{X}_1$ と $\mathbf{X}_2$）にあった土粒子は現在形態において同じ位置 $\mathbf{x}$ に来ないことを意味している．あるいは逆に，現在形態において異なった位置（例えば $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$）にある土粒子は基準形態において同じ位置 $\mathbf{X}$ にない，すなわち別の土粒子であることを意味している．式(1)第２式は間隙水について同様のことを意味する．

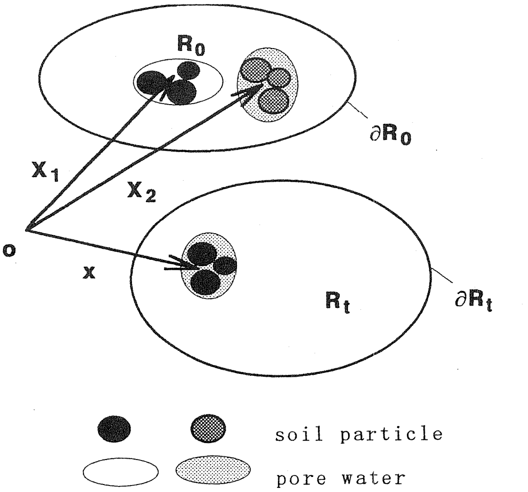

図１：混合体理論における点の概念と土粒子および間隙水の運動（基準形態 R_0 で $\mathbf{X}_1$ にある土粒子と $\mathbf{X}_2$ にある間隙水が現在形態で位置 $\mathbf{x}$ に移る）

土粒子および間隙水の運動が式(1)で表されるとき，それらの速度は

$$\mathbf{v}_s=\frac{\partial\chi_s}{\partial t}\ ;\quad \mathbf{v}_w=\frac{\partial\chi_w}{\partial t} \tag{2}$$

で与えられる．一般に運動する粒子に付随した量の時間的変化率は，その粒子速度に関連した，いわゆる物質導関数で表される．しかし，たとえば間隙比や間隙率のような，土粒子および間隙水の両方の配置に依存した量の時間的変化率は土粒子の運動と間隙水の運動の両方の影響を受ける．つまり物質導関数を２通りに定義できることになる．従ってそのような量の時間的変化率を扱うときには注意が必要である．本論では物質導関数には上付きの‘・’を用い，その都度定義を付すことにする．

２．２　質量の平衡式

ある瞬間 t において空間の領域 R_t を占める物質の全質量を $M(R_t)$と書くと，質量の平衡は次式で表現できる：

$$\frac{d}{dt}M(R_t)=-Q(\partial R_t) \tag{3}$$

ここに，∂R_t は R_t の境界を表し，$Q(\partial R_t)$は∂R_t を通って単位時間当りに R_t から流出する物質の質量を表す．

式(3)を飽和土に適用すると

$$\frac{d}{dt}\{M_s(R_t)+M_w(R_t)\}=-\{Q_s(\partial R_t)+Q_w(\partial R_t)\} \tag{4}$$

しかし，式(4)は，土粒子と間隙水との間で例えば化学反応による相の変換が起こるような場合，即ち，お互いに同量の質量をやり取りする場合を包含している．土の場合そのような相変換は起こらないと考えられる．お互いに質量のやり取りをしないという条件を付けるためには，次のように各相別に独立した連続の式を立てる必要がある：

$$\frac{d}{dt}\{M_s(R_t)\}=-\{Q_s(\partial R_t)\} \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\{M_w(R_t)\}=-Q_w(\partial R_t) \tag{6}$$

具体的な式を求めるためには，領域 R_t を規定する必要がある．飽和土の場合，

① R_t を土粒子の物質領域と考える；

② R_t を間隙水の物質領域と考える；および

③ R_t を空間に固定した領域と考える

の３通りの方法が考えられる．いずれの方法によっても最終的に得られる式は，当然ながら同じになる．ここでは，①の立場から定式化する．尚，土粒子の物質領域とは，異なった時間においても常に同じ土粒子から構成されるような，間隙も含めた領域である．

境界∂R_tが，境界上の土粒子の速度$\mathbf{v}_s$で空間を移動することを考慮して，式(5)と(6)の各項を表すと

$$\frac{d}{dt}M_s(R_t)=\int_{R_t}\left\{\frac{\partial\overline{\rho}_s}{\partial t}+(\mathrm{grad}\,\overline{\rho}_s).\mathbf{v}_s+\overline{\rho}_s\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_s\right\}dV \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}M_w(R_t)=\int_{R_t}\left\{\frac{\partial\overline{\rho}_w}{\partial t}+(\mathrm{grad}\,\overline{\rho}_w).\mathbf{v}_s+\overline{\rho}_w\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_s\right\}dV \tag{8}$$

$$Q_s(\partial R_t)=0 \tag{9}$$

$$Q_w(\partial R_t)=\int_{\partial R_t}\{\overline{\rho}_w(\mathbf{v}_w-\mathbf{v}_s).\mathbf{n}\}dA \tag{10}$$

となる．ここに，$\mathbf{n}$ は境界上の外向き単位法線ベクトル；$\overline{\rho}_w$，$\overline{\rho}_s$は単位体積当りの土（混合体）に占める土粒子および間隙水の質量であり，土，土粒子および間隙水の密度をそれぞれ ρ_t，ρ_s，ρ_w とすると

$$\overline{\rho}_w=n\rho_w\ ;\quad \overline{\rho}_s=(1-n)\rho_s\ ;\quad \rho_t=\overline{\rho}_s+\overline{\rho}_w \tag{11}$$

の関係がある．nは間隙率である．

式(7)～(10)を式(5)と(6)に代入すると時間 t に領域 R_t を占める飽和土が満たすべき質量の平衡式を得る．実際，条件(5)と(6)は任意の領域に対して成り立つので，積分記号をはずして，若干の式変形の後，次の微分方程式の形で表すことができる：

$$(1-n)\left\{\frac{\dot{\rho}_s}{\rho_s}+\mathrm{div}\,\mathbf{v}_s\right\}-\dot{n}^{(s)}=0 \tag{12}$$

$$n\left\{\frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w}+\mathrm{div}\,\mathbf{v}_w\right\}+\dot{n}^{(w)}=0\,, \tag{13}$$

ここに，

$$\dot{\rho}_s=\frac{\partial\rho_s}{\partial t}+(\mathrm{grad}\,\rho_s).\mathbf{v}_s \tag{14}$$

$$\dot{\rho}_w=\frac{\partial\rho_w}{\partial t}+(\mathrm{grad}\,\rho_w).\mathbf{v}_w \tag{15}$$

$$\dot{n}^{(w)}=\frac{\partial n}{\partial t}+(\mathrm{grad}\,n).\mathbf{v}_w \tag{16}$$

$$\dot{n}^{(s)}=\frac{\partial n}{\partial t}+(\mathrm{grad}\,n).\mathbf{v}_s\,. \tag{17}$$

式(12)と(13)は全く独立に成り立てばよいというわけではなく，間隙率 n を通して互いに関係している．もし，式(12)と(13)における間隙率場が同時刻で異なるような場であれば，土粒子と間隙水以外の物質が R_t に入ったり，逆に，異なる複数の土粒子（即ち基準形態で異なった位置にあった土粒子）が同じ点に重なって存在したりするようなことが起こる．即ち，式(12)と(13)に現れる間隙率場は同じでないといけない．

3．考察

3．1　土の体積ひずみについて

同じ土粒子から構成され,内部で変形勾配が一定であるような微小な土要素を考える．要素の現在および基準形態における体積をΔVと$(\Delta V)_0$とすると，純粋に運動学的な考察によって次の関係を導くことが出来る：

$$\Delta V=J(\Delta V)_0 \tag{18}$$

ここに，

$$J=\det\mathrm{F}\ ;\ \mathrm{F}=\mathrm{Grad}\ \mathbf{x} \tag{19}$$

なお，F は変形勾配テンソルで，土粒子の運動が式(1)第１式で与えられるとき，近接する２粒子の位置の差（現在形態で d$\mathbf{x}$，基準形態で d$\mathbf{X}$）を次のように関係づける量である．

$$\mathrm{d}\mathbf{x}=\mathrm{F}\mathrm{d}\mathbf{X} \tag{20}$$

体積変形の尺度として，次式で定義される公称ひずみ（$\overline{\varepsilon}_v$）または自然ひずみ（ε_v）が用いられる：

$$\overline{\varepsilon}_v=-\frac{\Delta V-(\Delta V)_0}{(\Delta V)_0}\ ;\ \varepsilon_v=-\ln\frac{\Delta V}{(\Delta V)_0}\,, \tag{21}$$

式(18)を考慮して，体積ひずみをJを用いて表わすと

$$\overline{\varepsilon}_v=-(J-1)\ ;\ \varepsilon_v=-\ln J \tag{22}$$

また体積ひずみ速度は

$$\dot{\overline{\varepsilon}}_v=-J\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_s\ ;\ \dot{\varepsilon}_v=-\mathrm{div}\,\mathbf{v}_s \tag{23}$$

以上の議論は変形が微小であるか有限であるかには関係しないこと，また，土粒子の圧縮性についても触れていないことに注意したい．さらに，微小な土要素であっても要素内で間隙比は一定である必要はない．

3．2　土粒子の連続の式について

土粒子の連続の式(12)において，土粒子の非圧縮性を仮定すると，即ち，$\dot{\rho}_s=0$とおくと

$$-\frac{\dot{n}^{(s)}}{1-n}=-\operatorname{div}\mathbf{v}_s \tag{24}$$

上式左辺を間隙比 e で表すと

$$-\frac{\dot{e}^{(s)}}{1+e}=-\operatorname{div}\mathbf{v}_s \tag{25}$$

ここに，$\dot{e}^{(s)}$ は

$$\dot{e}^{(s)}\equiv\frac{\partial e}{\partial t}+(\operatorname{grad}e).\mathbf{v}_s \tag{26}$$

で定義され，土粒子の運動（したがって土骨格の変形）に伴って生じる間隙比の変化の効果を含んでいる．

式(23)と式(25)を用いて体積ひずみ速度を間隙比で表わすと

$$\dot{\varepsilon}_v=-J\frac{\dot{e}^{(s)}}{1+e}\ ;\ \dot{\varepsilon}_v=-\frac{\dot{e}^{(s)}}{1+e} \tag{27}$$

結局，土粒子の非圧縮性を仮定すると，土の体積ひずみ速度が式(27)のように表わされる．土粒子の非圧縮性を仮定した上で体積ひずみ速度を式(27)で評価する限り，土粒子の連続の式を暗黙のうちに満足していることになる．意識的または無意識的にせよ，土粒子の連続の式が特別に考慮されなくても合理的な解が得られるのはこのためである．これは，微小変形の仮定の有無に拘わらず言えることに注意する．

3．3　間隙水の連続の式

先に述べたように式(12)と(13)に現れる間隙率場は同じであるので，式(12)を用いて式(13)を変形すると式(13)は次のように簡単になる：

$$(1-n)\frac{\dot{\rho}_s}{\rho_s}+n\frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w}+\operatorname{div}\mathbf{v}_s+\operatorname{div}(n\mathbf{v}_r)=0 \tag{28}$$

土粒子の非圧縮性を仮定すると

$$n\frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w}+\operatorname{div}\mathbf{v}_s+\operatorname{div}(n\mathbf{v}_r)=0 \tag{29}$$

さらに間隙水の非圧縮性（$\dot{\rho}_w=0$）を仮定すると

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_s+\operatorname{div}(n\mathbf{v}_r)=0 \tag{30}$$

または，体積ひずみを用いて

$$-\frac{1}{J}\dot{\varepsilon}_v+\operatorname{div}(n\mathbf{v}_r)=0\ ;\ -\dot{\varepsilon}_v+\operatorname{div}(n\mathbf{v}_r)=0 \tag{31}$$

が得られる．

式(31)の物理的な意味を調べるために，第１式と第２式をそれぞれ領域 R_t で積分すると

$$\int_{Rt}\frac{1}{J}\dot{\varepsilon}_v dV=\int_{R0}\dot{\varepsilon}_v dV=\int_{Rt}\operatorname{div}(n\mathbf{v}_r)dV=\int_{\partial Rt}(n\mathbf{v}_r).\mathbf{n}da \tag{32}$$

$$\int_{Rt}\dot{\varepsilon}_v dv=\int_{\partial Rt}(n\mathbf{v}_r).\mathbf{n}da \tag{33}$$

これらの式は，領域 R_t を占める土の体積減少速度が単位時間に境界を通って出た間隙水の体積に等しいことを表わしている．言い換えると，土粒子と間隙水が非圧縮であるとき飽和土の体積変化は間隙水の流出入量に等しい，ことを意味している．また，$n\mathbf{v}_r$ がダルシー流速であることも理解できる．

式(28)～(31)を導くに当たり，土粒子または間隙水の非圧縮性以外の仮定は置かなかった．従って，これらの式はいわゆる有限変形解析において用いることができる．著者は非圧縮性土粒子と圧縮性間隙水から成る飽和土の連続の式(29)を用いて有限要素解析のための定式化を行い[3]，定ひずみ速度圧密試験[4),5)]や地下水位変動に起因する地盤沈下[6)]などの１次元圧密現象を有限変形有限要素解析し，同式の有効性を確かめている．

土骨格の変形に対して微小変形の仮定を設けると，現在形態における発散(div)は基準形態におけるものと同じになり，公称体積ひずみと自然体積ひずみの差もなくなる．また，式(26)右辺第２項を無視すると，式(31)は従来の微小変形圧密理論で用いられた間隙水の連続の式と同じになる．

4．結論

混合体理論に基づいて飽和土に対する質量平衡式を厳密に導いた．その過程において，土粒子と間隙水の間の相変換を許さない限り，土粒子と間隙水の各々に対して質量平衡式を満足させなければならない；しかし，土粒子の非圧縮性を仮定する限り，土骨格の体積ひずみ速度を式(27)で評価すれば土粒子の連続の式は自動的に満足されることを示した．微小変形の仮定を設けないで導いた間隙水の質量平衡式は，微小変形を仮定した場合の式を合理的に説明できた．

謝辞
本研究は，文部省科学研究費（基盤研究C(2)08650578および基盤研究A(1)08305016）の補助を受けて行った．記して謝意を表する．

参考文献

1) Atkin, R. J. & Craine, R.E. (1976a): Continuum theories of mixyures: basic theory and historical development, Q. J. Mech. Appl. Math., Vol.29, pp. 210-244
2) Atkin, R. J. & Craine, R.E. (1976b): Continuum theories of mixtures: applications. J. Inst. Math. Appl., Vol.17, pp. 153-207
3) Shimizu, M. (1994): Formulation for finite deformation FE analysis of one dimensional consolidation of saturated soils, reports of Faculty of Eng., Tottori University, Vol.25, No.1, pp.187-198
4) Shimizu, M., Narahara, T. & Umetani, A. (1995): Scrutiny of a method for determining consolidation properties from CRS consolidation tests, Proc. Int. Symposium on Compression and Consolidation of Clayey Soils, IS-Hiroshima'95, Vol.1, pp.555-560
5) Shimizu, M. (1996): Large and small strain FE analyses of CRS consolidation tests of soft marine clays, Proc. Sixth Int. Offshore and Polar Engineering Conf., Vol.1, pp.424-430
6) Shimizu, M. (1996): Application of the large strain FEM to the prediction of a land subsidence due to the variation of groundwater level, Proc. J.F.Poland Memorial Symposium, American Association of Engineering Geologists (in press)