

## 粒子群最適化法による最小安全率の探索

## Search for Minimum Factor of Safety using Particle Swarm Optimization Method

工藤賢司	Kenji KUDO	(岡山大学大学院環境生命科学研究科)
珠玖隆行	Takayuki SHUKU	(岡山大学大学院環境生命科学研究科)
西村伸一	Shin-ichi NISHIMURA	(岡山大学大学院環境生命科学研究科)
柴田俊文	Toshifumi SHIBATA	(岡山大学大学院環境生命科学研究科)

本研究では、大域的最適化法の一つである粒子群最適化法 (Particle Swarm Optimization Method) に着目し、その斜面安定解析における最小安全率の探索問題への適用性について検討する。均質斜面の最小安全率を探索する問題は、最小化問題と捉えられ、これまで勾配法等を用いた解析手法が提案されている。しかしながら、不均質地盤を扱う場合は、局所最適化手法では適用できない場合が想定でき、このような問題に対しても効率的に精度の高い最小安全率を探索する技術が必要となる。本研究ではメッシュに基づく斜面の安定解析手法を対象に、粒子群最適化法による最小安全率の探索を試みる。また粒子群最適化には種々の経験的なパラメータがあり、それらの解析結果への影響についても検討する。

キーワード：斜面安定，最小安全率，粒子群最適化法

(IGC : E06)

## 1. はじめに

地盤構造物を設計する際には、原位置試験や室内試験により設計に必要な地盤パラメータを推定し、構造物に対して適切な設計手法を選定した後、想定される荷重条件の下で構造物が安全かどうか計算される。地盤工学においては、構造物の安全性の指標として安全率 (factor of safety) を用いることが多いが、安全率法では算定された作用力を過大に見積もる、もしくは抵抗力を過小に見積もることによって、設計における種々の不確定性に対処している。安全率法の考え方は非常にシンプルであり、その容易さからこれまで地盤工学実務でも一般的に用いられてきた。

しかしながら近年、設計体系が許容応力度法から信頼性設計法へと移行しつつあり、構造物の安全性を定量的に評価する必要に迫られている。構造物の安全性を定量的に評価するためには、設計における種々の不確定性をなるべく定量化し、設計に反映させる必要がある。とくに地盤構造物の設計においては地盤パラメータの空間的なばらつきが構造物の安全性に大きく影響を及ぼすため、地盤の本来のばらつき・不均一性を考慮した設計が必要不可欠である。

本研究の最終的な目標は、地盤の不均質性を考慮した斜面の安定解析手法の構築である。具体的には、既存の斜面の安定解析手法 (例えば Fellenius 法) と確率場の生成手法 (例えば Mid-point 法<sup>1)</sup>) を組合せ、地盤の不均質性が構造物の安全性に及ぼす影響や、安全で経済的な

地盤構造物の設計に必要な地盤調査計画について議論することにある。

通常、斜面の安全率を Fellenius 法などの簡便法によって算定する場合、円弧の中心座標や半径を変えた数多くの計算が試行錯誤的に実施され、その中の最小の安全率が斜面の安全率として用いられる。これらの手順は非常に煩雑であり、たとえば破壊確率を算定するためにモンテカルロ法を用いる場合、数千回の試行錯誤計算を行うことは現実的に不可能である。一方、斜面の最小安全率の計算を最適化問題として捉え、最適化アルゴリズムによってその値を算定する研究も行われている。しかしながら、不均質斜面の最小安全率を算定する際には、最小安全率が多峰性の分布を示し、従来の局所最適化手法では精度よく最小安全率が算定されないことが予想される。

そこで本稿では、斜面の最小安全率を効率的に探索する方法として、大域的最適化法の一つである粒子群最適化法<sup>2),3)</sup> (Particle Swarm Optimization (PSO) method, 以下、PSO) に着目し、その斜面の最小安全率の探索問題への適用性について議論する。

2. PSO<sup>2),3)</sup>

PSO とは、個体群に基づく最適化アルゴリズムの一つである。鳥、魚などの生物の集団行動がヒントにされており、個々の情報を共有し更新しながら探索空間を移動し、目的関数の最適解を探索する方法である。最適化手

法は、勾配法などの局所最適化法<sup>例えば 4)</sup>と、遺伝的アルゴリズムなどの大域的最適化手法<sup>例えば 5)</sup>に分けて考えることができる。PSOは大域的最適化手法に分類され、どのような問題にも容易に適用できることから、近年、地盤工学の問題に適用されてきている<sup>6)</sup>。

## 2.1 計算方法とアルゴリズム

PSO では、はじめに  $N$  個の粒子を発生させ、それらの粒子が探索空間を移動し解を探索する。探索には、各粒子に関する以下の情報が用いられる。

$\mathbf{x}$  は粒子の位置ベクトル、 $\mathbf{v}$  は粒子の速度ベクトルを表す。これら 2つのベクトルは、粒子の番号  $i = (1 \sim N)$ 、計算の試行回数  $k = (1 \sim M)$  の値をとる。粒子は探索空間を与えられた初期位置、初期速度から探索を開始する。各粒子の位置ベクトル、速度ベクトルは、ステップ毎に以下の更新式に従って更新される。

$$\mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{x}_k^i + \mathbf{v}_{k+1}^i \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_{k+1}^i = w\mathbf{v}_k^i + c_1r_1(p_k^i - \mathbf{x}_k^i) + c_2r_2(p_g - \mathbf{x}_k^i) \quad (2)$$

式(2)の  $p_k^i$  は、個体  $i$  が  $k$  回目の探索までに求めた最適な値を示す。また、 $p_g$  はこれまでの探索において、群れ全体の中での最適解を示す。 $r_1, r_2$  は  $[0, 1]$  の乱数である。 $c_1, c_2$  は各項に働く重み係数とする。また  $w$  は慣性項と呼ばれる重み係数であり以下の式で表現される。

$$w = w_{\max} - \frac{w_{\max} - w_{\min}}{k_{\max}} \times k \quad (3)$$

$w_{\max}, w_{\min}$  は慣性項の最大値、最小値を示す。 $k_{\max}$  は最大試行回数を示す。以上より、PSOの計算アルゴリズムは図-1のようにまとめることができる。

## 2.2 PSOのパラメータ

PSOで設定が必要なパラメータは粒子数  $N$ 、最大試行回数  $k_{\max}$ 、慣性項の最大値  $w_{\max}$ 、慣性項の最小値  $w_{\min}$ 、重み係数  $c_1, c_2$  の 6 つである。 $w_{\max}, w_{\min}$  に関しては一般的に  $w_{\max}=0.9, w_{\min}=0.4$  という値が推奨されている<sup>7)</sup>。 $c_1, c_2$  はそれぞれ認知的および社会的パラメータと呼ばれるもので、 $c_1+c_2=4$  となるように設定する必要がある。粒子数  $N$  はより大きな値を用いることが推奨されるが、粒子数に比例して計算量も増大することから、問題に応じた適切な値を設定する必要がある。既往の文献を参考にすると、通常、100程度の値が用いられている。試行回数  $k$  に関しても、十分大きな値を取ることが望ましいが、計算量との兼ね合いから適切な値を設定する必要がある。既往の文献を参考にすると、 $k_{\max}$  に関しては 1000

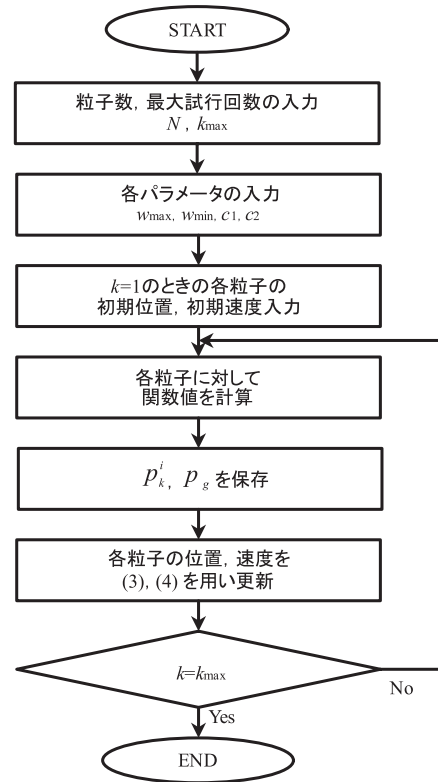


図-1 PSOの計算アルゴリズム

程度の値が用いられている。

## 3. 適用例

ここでは、PSOの適用性について検証、メッシュを用いた方法の特性を知るために、均質斜面の安定解析を取り上げ、最小安全率の探索を試みる。

### 3.1 斜面安定解析手法

本研究の最終的な目標は、地盤の不均一性を考慮した解析を実施することであるが、斜面の不均一性を考慮するためには解析対象をメッシュ分割する必要がある。メッシュに分割することで、確率場の生成法によってある統計的性質に従う地盤物性値が各メッシュに与えられ、地盤の不均一性が再現される。しかしながら、不均質性を考慮する以前に、メッシュベースの安定解析の適用性を均質斜面の解析例を通して明らかにする必要がある。この目的の達成のため、本研究において安定解析に用いる斜面の物性は均質とした。斜面形状を図-2に、そのメッシュ分割図を図-3に示す。メッシュは全て同じ形状であり、長さ 0.250m、高さ 0.125 m の三角形形状である。なお、本論文で取り上げた斜面安定問題は鶴飼<sup>8)</sup>によって取り上げられた問題であり、安全率は既知である。図-2に示すパラメータを用いて安全率を計算した結果は、Fellenius法で1.292、せん断強度低減法で1.354であった。

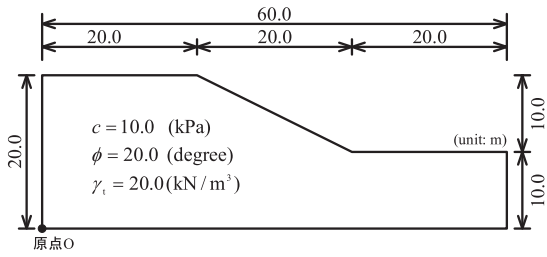


図-2 斜面モデル

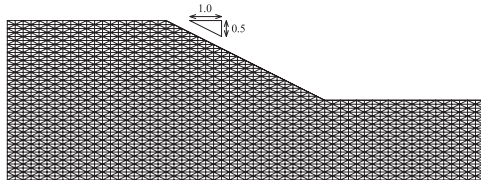


図-3 メッシュ分割した斜面モデル

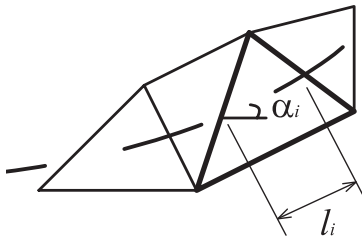


図-4 メッシュを横切るすべり線と  $l$  と  $\alpha$  の関係

本研究では、各メッシュに対して式(4)に示される Fellenius 法に従って、抵抗力および滑動力を算定し、生成した円弧によって切られるメッシュの抵抗力の総和、滑動力の総和から安全率を計算した。

$$F_s = \frac{\sum (c_i \times l_i + W_i \times \cos \alpha_i \times \tan \phi)}{\sum W_i \times \sin \alpha_i} \quad (4)$$

ここに、 $F_s$ は斜面の全体安全率、 $c_i$ は要素  $i$  の粘着力、 $l$  は要素  $i$  を切る円弧の長さ、 $W_i$ は要素  $i$  に作用する土被り圧、 $\alpha_i$ は斜面  $i$  を切る円弧の勾配、 $\phi_i$ は要素  $i$  の内部摩擦角を表す。図-4 に要素を横切るすべり面と  $l$ 、 $\alpha$  の関係を示す。

メッシュに基づいた計算の手順は次の通りである。まず、円の中心座標（水平距離  $x$ 、鉛直距離  $y$ ）と半径 ( $r$ ) を設定する。生成した円弧に対する安全率を前述の方法（式(4)）で算定する。その後、円の中心座標および半径を変えた計算を試行錯誤的に数 100 回～1000 回程度実施し、計算によって得られた最小の安全率を斜面の最小安全率とする。

斜面の最小安全率探索問題においては、一般的に勾配法やその他の最適化手法が用いられるが、本研究で対象とするメッシュベースの斜面安定解析手法においても従来の最適化法が適用可能かを検討するため、最小安全率の性質について考察する。解の性質について調べるた

め、円弧の中心座標  $x$ 、 $y$  と半径  $r$  が異なるサンプルを超一様分布列により 10000 個発生させ、得られた最小安全率を中心座標に関してコンターマップとして表すことを考えた。この理由は、超一様分布列を用いることで、解の探索空間に一樣にサンプルが生成され、最小安全率の分布が明瞭に表現されると考えたからである。超一様分布列として種々の数列が提案されているが、ここでは最も基本的な Halton 列<sup>9)</sup>と呼ばれる数列を用いた。Halton 列は van der Corput 列を単純に  $k$  次元に拡張したものである。はじめに、 $b > 1$  を整数とする。整数  $n \geq 0$  に対して  $m = \lceil \log_b n \rceil$  ( $\lceil \cdot \rceil$  はガウス記号) とし、基底逆関数を

$$\Phi_b(n) = \frac{a_0}{b} + \frac{a_1}{b^2} + \dots + \frac{a_m}{b^{m+1}} \quad (5)$$

と定義する。ここで、 $a_j, j = 0, 1, \dots, m$  は  $n$  の  $b$  進展開  $n = a_0 + a_1b + \dots + a_mb^m$  における係数とすると、van der Corput 列は次のように定義される。

$$x_n = \Phi_b(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

上式を基底  $b$  の van der Corput 列と呼ぶ。また、 $k$  次元点列

$$X_n = (\Phi_{b_1}(n), \dots, \Phi_{b_k}(n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

を Halton 列という。ここで、 $b_1, \dots, b_k$  はどの 2 つも互いに素な正整数とする。図-5 に超一様分布列 (Halton 列) によるパラメータの構成例を示す。図において、縦軸の Dimension 1 が円弧の中心座標  $x$  などの 1 つの変数に対応し、横軸の Trial number が試行回数に対応する。図より、超一様分布列を用いることにより、空間に均質にパラメータが配置されていることがわかる。Halton 列により発生させたサンプルを用いて得られた解の探索空間における安全率の分布を図-6 に示す。(a)は半径  $r$  を 16m に固定した場合の、 $x$ - $y$  空間における安全率の分布、(b)は

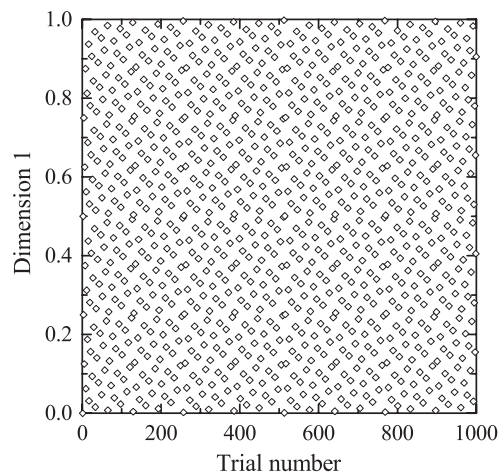
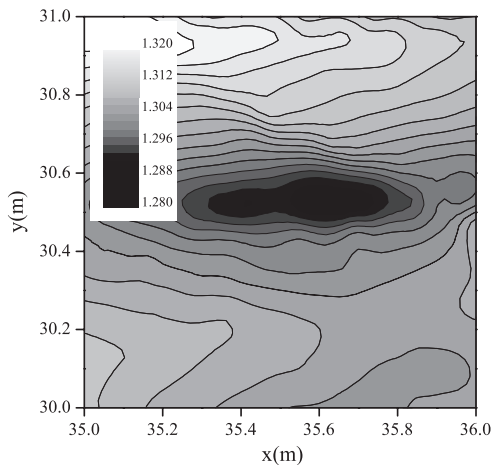
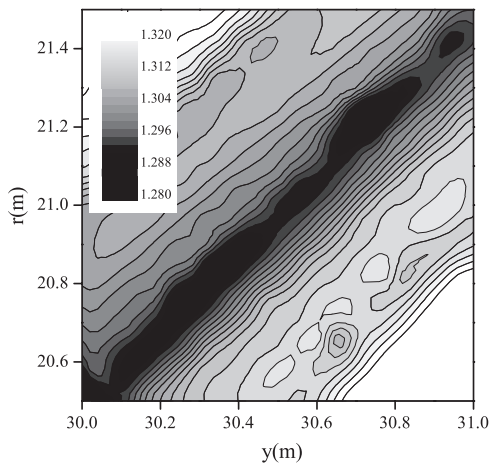


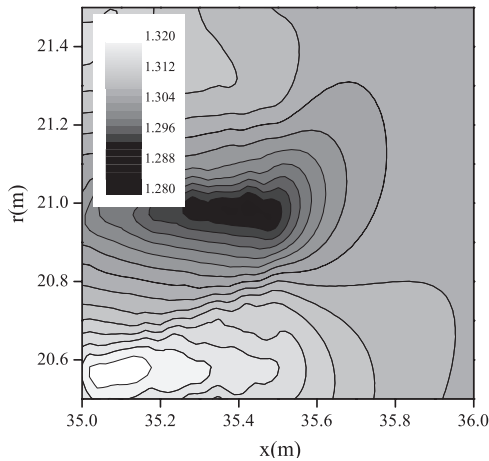
図-5 超一様分布列 (Halton 列) によるパラメータの構成例



(a) x-y の関係



(b) y-r の関係



(c) x-r の関係

図-6 最小安全率の空間分布

$x$  を 35.5m に固定した場合の、 $y$ - $r$  空間における安全率の分布、(c)は  $y$  を 30.5m に固定した場合の  $x$ - $r$  空間における安全率の分布を表している。図において、コンターが白に近づくほど高い安全率を示し、黒に近づくほど小さな安全率を示す。図-6 から明らかなように、安全率の分

布は単純な同心円状ではなく、いくつかの局所解が存在していることがわかる。このような問題に勾配法のような既存の最適化手法を適用する場合、解が局所解に停留する問題がしばしば生じる。そのような問題に対しては、PSO のような大域的最適化手法が有効となる。

### 3.2 PSO による最小安全率の探索

図-2 に示した斜面の安定問題を対象に、PSO を用いて最小安全率を探索する。先述したように、対象とする問題は最小安全率に対して多峰性を示すが、このような問題に大域的最適化手法の PSO が適用可能かを検討する。ここでは発生させる粒子数  $N$  が 10, 50, 100 の 3 ケースを行い、粒子数の違いが最小安全率の探索結果に及ぼす影響についても検討する。

計算初期の粒子は、表-1 に示す範囲内で一様乱数により発生させ、PSO に必要なパラメータは、表-2 の値を用いた。

表-1 PSO における粒子の発生範囲

パラメータ	粒子の範囲
中心座標 $x$ (m)	0 ~ 60
中心座標 $y$ (m)	30 ~ 50
半径 $r$ (m)	15 ~ 35

表-2 PSO のパラメータ

パラメータ	設定値
試行回数	$k$ 1000
粒子数	$N$ 10 ~ 100
慣性項の最大値	$w_{\max}$ 0.9
慣性項の最小値	$w_{\min}$ 0.4
認知的パラメータ	$c_1$ 1.7
社会的パラメータ	$c_2$ 2.3

最小安全率の探索結果を図-7 に示す。  $N=10$  の結果では、最小安全率は計算開始時から試行回数 100 回までの間に大きな変化を示すものの、その後一定の値を示す。しかしながら、試行回数 800 回程度で再度値が変動し、その後は再び一定の値を示している。解析終了時における最小安全率は 1.284 であった。  $N=50$  では、最小安全率は、解析開始から試行回数約 120 回までに大きく変動し、約 150 回以降から解析終了の 1000 回まで一定の値を示した。最小安全率は 1.251 であった。粒子数 10 回の結果

粒子群最適化法による最小安全率の探索

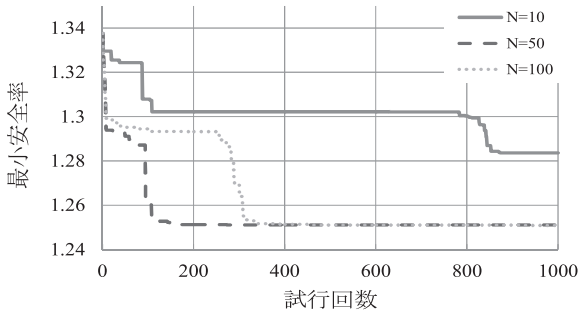


図-7 粒子数の違いによる最小安全率の計算結果

と比較してより収束が早く、またより小さい安全率が得

られた。最後に $N=100$ の結果に着目すると、解析開始から約10回間に急激に変化が見られたが、その後、約250回まではほぼ一定の値を示している。試行回数が約250回から約310回の間にも大きな変化が見られ、その後は解析終了までほぼ一定の値を示した。この解析における最終的な最小安全率は1.250程度であり、粒子数50の場合とほぼ同じ最小安全率が得られた。 $N=100$ と $N=50$ の収束過程には違いが生じているが、これは乱数の種の違いによるものと考えられる。これらの結果だけからどの粒子数が適切かを判断することはできないが、少なくとも10個の粒子では最小安全率は得られないようであ

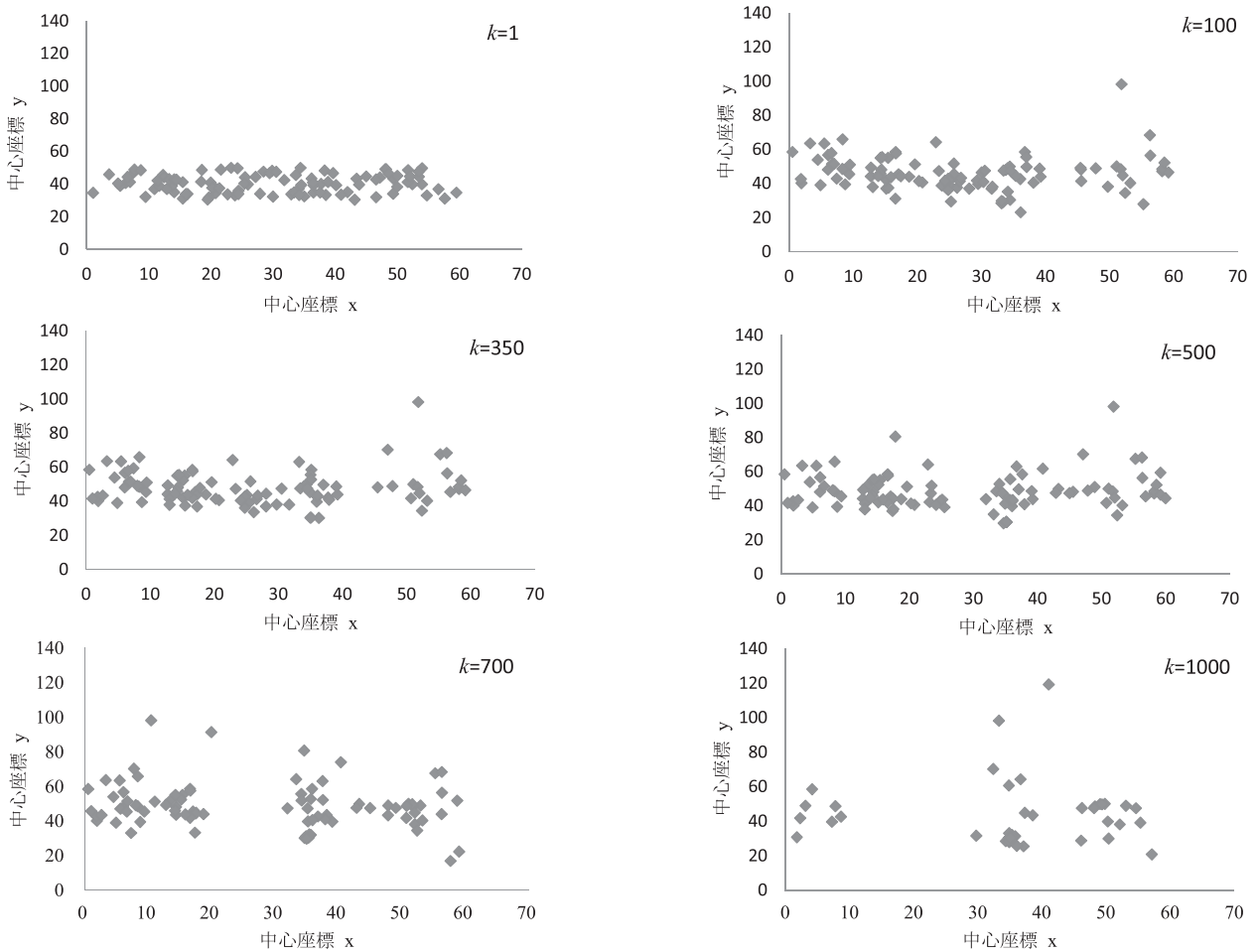


図-8 粒子の移動状況( $x-y$ ,  $N=100$ )

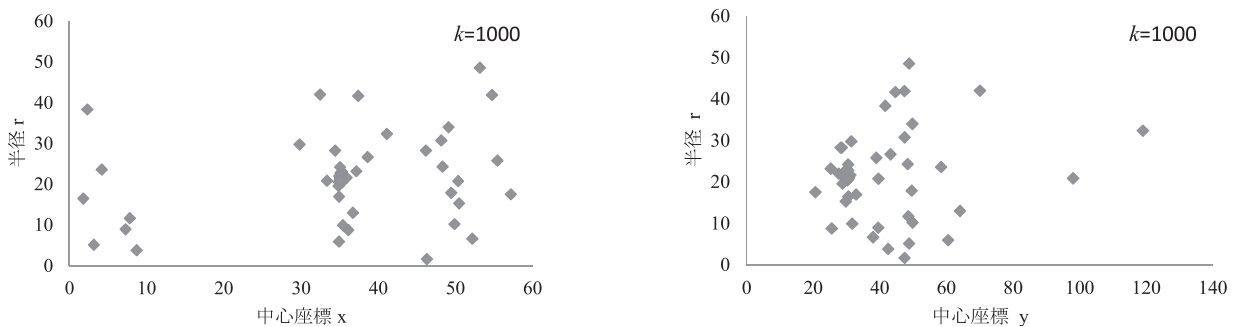


図-9 粒子の移動状況( $x-r$ ,  $y-r$ ,  $N=100$ )

る。既往の研究においても 50 個程度の粒子が用いられており、本論文で対象とした問題においても、50 個以上の粒子を用いることが推奨される。

図-8 に粒子数 100 個の計算ケースにおける、粒子の移動状況を示す。k=1 のとき、当然粒子配置は初期分布と同じような分布を示している。計算が進み、k=100, 350, 500 になるにつれ、粒子が解空間に散らばっていく様子が確認できる。k=700、において粒子は x 座標が 20m から 30m の範囲に分布が認められなくなった。k=1000 では粒子数が他のステップより少なく見えるが、これは最適解付近に粒子が集まり、重なっているからである。また、図-9 に粒子数 100 個のときの k=1000 における x-r, y-r の分布を示す。図-9 から図-8 と同じように最適解付近に粒子が集まり重なっていることがわかる。これらの結果から、PSO は大域的な最適化手法であること、および局所解に陥ることなく最小安全率が算定できることが理解できる。表-3 に各計算回数における最小安全率をまとめた。

前述したように、同じ斜面の問題を対象に行った安全率の算定結果は、Fellenius 法で 1.292、せん断強度低減法で 1.354 である。PSO による結果は 1.24~1.28 程度であり、本研究で用いたメッシュベースの方法で、工学的に十分な精度で斜面の安全率が計算できることがわかる。

表-3 各計算回数 k における各パラメータと最小安全率

k	$F_s$ -min	x (m)	y (m)	r (m)
1	1.338	36.551	34.805	25.472
100	1.294	35.388	30.592	21.008
350	1.252	35.163	30.348	20.848
700	1.251	35.155	30.339	20.839
1000	1.250	35.114	30.298	20.798

### 3.4 パラメータの感度解析

表-2 に PSO に必要なパラメータをまとめたが、収束や解析結果に大きく影響を及ぼすパラメータは  $c_1$ ,  $c_2$  である。 $c_1$  と  $c_2$  の和が 4 であるという条件を満たせば、どのような値も設定することができるため、ここでは、 $c_1$ ,  $c_2$  の設定が計算結果に及ぼす影響について検討する。

感度解析に用いる  $c_1$ ,  $c_2$  の値を表-4 にまとめる。それぞれのパラメータを極端に小さくした場合や中間的な値を設定した場合など、計 7 ケースの計算を行った。な

お、本計算における粒子数は 100 に固定し、計算回数 k についても 1000 回に固定した。

計算回数 1000 回目の最終的な粒子の分布図を図-10 に示す。 $c_1$  が小さい程、粒子全体が移動し、最適解付近に集まる傾向にある。逆に、 $c_2$  を小さくすれば、解空間全体に粒子が広がる傾向にある。これは  $c_1$  が粒子個体の最適な値、 $c_2$  が群れ全体の最適な値に対して作用する PSO の粒子の更新式に従っていることがわかる。このことから、 $c_1$  を小さくし過ぎると、全粒子が局所解に陥ってしまう可能性があり、大域的最適化法の特長が生かせない場合が想定される。図-11 に  $c_1=2.0$ ,  $c_2=2.0$  における x-r, y-r の分布を示す。半径 r は多少のばらつきは見られるものの、局所解に陥らず最適解に集まっていることがわかる。

図-12 に最小安全率の推移を示し、最終的に得られた最小安全率を表-5 にまとめる。パラメータの設定により得られる最小安全率が異なることがわかる。最も小さい安全率が得られたケースは 7 であるが、その他のケースもほぼ同様の最小安全率を示しており、 $c_2$  を小さくすることで最小安全率が得られやすいかどうかは、この結果だけから判断できない。

表-4 重み係数の設定

Case	$c_1$	$c_2$
1	0.1	3.9
2	0.5	3.5
3	1.0	3.0
4	2.0	2.0
5	3.0	1.0
6	3.5	0.5
7	3.9	0.1

表-5 各パラメータにおける k=1000 での安全率

Case	$F_s$ -min	x (m)	y (m)	r (m)
1	1.251	35.282	28.636	19.136
2	1.253	35.352	29.235	19.735
3	1.261	35.408	30.340	20.841
4	1.252	35.189	30.371	20.871
5	1.256	35.362	30.301	20.801
6	1.267	35.371	31.475	21.975
7	1.241	35.106	29.397	19.897

粒子群最適化法による最小安全率の探索

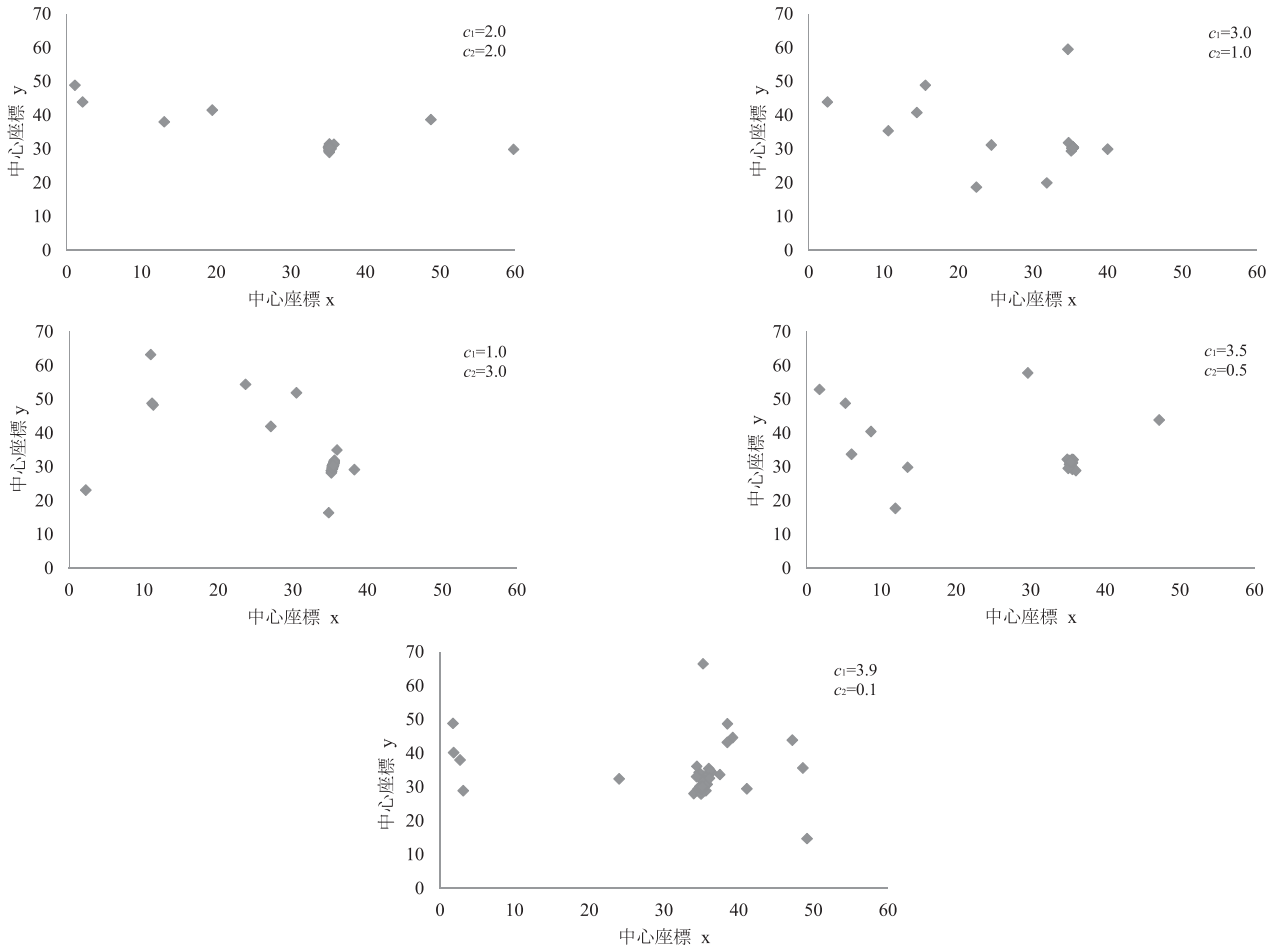


図-10 計算 1000 回目の粒子の  $x$ - $y$  の分布図

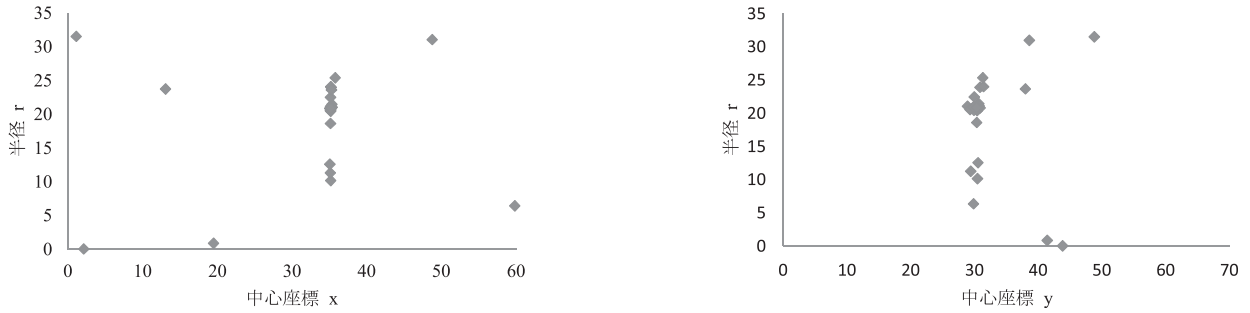


図-11 計算 1000 回目の粒子の  $x$ - $r$ ,  $y$ - $r$  の分布図( $c_1=2.0$ ,  $c_2=2.0$ )

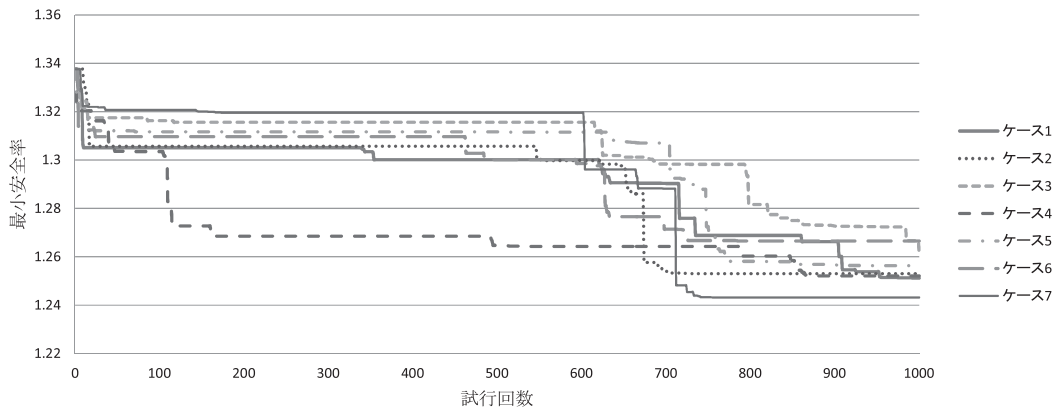


図-12 各ケースの最小安全率の推移

#### 4. まとめ

本研究では、斜面の安定計算における最小安全率の探索に PSO を用い、その適用性について検討した。得られた知見を以下に列挙する。

- (1) メッシュベースで斜面の安全率を求める場合、均一地盤であっても安全率に関して多峰性の分布を示す。
- (2) PSO が斜面の最小安全率の探索問題に適用できる可能性を示唆した。
- (3) PSO のパラメータ  $c_1$  を小さくとると、粒子全体で解の探索を行う傾向にあり、逆に  $c_2$  を小さくすると、各粒子単独で解の探索を行う傾向にある。

#### 参考文献

- 1) Gordon, A. Fenton and D. V. Griffiths: Risk assessment in Geotechnical Engineering, Wiley, 461p, 2008.
- 2) Kennedy, J. and Eberhart, R.: Particle swarm optimization, *Proc. Int. Conf. on Neural Netw.*,

pp.1942-1948, 1995.

- 3) 齋藤利通：粒子群最適化と非線形システム，電子情報通信学会誌，Vol.5，No.2，p.155-161，2011.
- 4) 中川 徹，小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，206p，1982.
- 5) 棟朝雅晴：遺伝的アルゴリズム-その理論と先端的手法-，森北出版株式会社，147p，2008.
- 6) 篠田昌弘：効率的な非円弧すべり探索法を用いた斜面の安全率算定法，土木学会論文集 C(地圏工学)，Vol.69，No.4，pp.432-443，2013.
- 7) 北山哲士，荒川雅生，山崎光悦：Particle Swarm Optimization の基礎的検討と混合変数問題への適用，日本機械学会論文集 A 編，71(706)，pp.968-975，2005.
- 8) 鶴飼恵三：安定解析におけるせん断強度低減法の有用性，土と基礎，Vol.38，No.1，pp.67-72，1990.
- 9) 手塚 集：超一様分布列の数理，計算統計 I/確率計算の新しい手法，岩波書店，pp.65-120，2003.

(2014年6月23日 受付)