

個別要素法などの離散化モデルにおけるばね剛性に関する考察

Note on spring stiffness in distinct element modeling

三橋大地 Daichi MITSUHASHI (鳥取大学大学院工学研究科)
 文村賢一 Kenichi FUMIMURA (大成建設(株))
 河野勝宣 Masanori KOHNO (鳥取大学大学院工学研究科)
 西村 強 Tsuyoshi NISHIMURA (鳥取大学大学院工学研究科)

本文では、微小変形の仮定のもと、質点や剛体を用いた個別要素法(DEM)などの離散系解析法に用いられるばね係数を弾性定数に基づいて決定する方法と、その方法において、剛体回転量を質点間の相対変位量から除去して純粋な変形量を求める方法を記述する。具体的には、超弾性構成則を導入して弾性係数テンソルとばね係数(k_n , k_t)の関係式を示し、ひずみの算出に際しては、剛体回転角の記述にオイラー角を用いて相対変位から剛体回転量を除去している。これにより、角運動量を精度よく保存できる、さらには、計算量を軽減できると考えている。一軸圧縮解析を示して解析法の概要と係数決定法の性能を記述する。

キーワード：3次元格子ばね解析法、ばね剛性、ポアソン比 (IGC : G13)

1. 緒言

本文では、微小変形の仮定のもと、質点や剛体を用いた離散系解析法に用いられるばね係数を弾性定数に基づいて決定する方法と、その方法において、剛体回転量を質点間の相対変位量から除去して純粋な変形量を求める方法を記述する。個別要素法(DEM)に代表される離散系解析法は、質点あるいは剛体間をばねで連結して、個々の要素の相対運動で解析対象の変形を表現する解析手法である。このような解析法の利用に際しては、ばね係数の設定値と解析対象の弾性定数などの材料特性との対応関係が重要である。一軸圧縮試験などの解析によって、その設定値と材料特性を結びつける報告もある¹⁾。阿部²⁾は、等方弾性体に対するつり合い式にDEMにおける要素集合体の巨視的つり合い式が等価であると仮定して、法線方向ばね係数 k_n 、接線方向ばね係数 k_t と弾性定数の関係式を誘導している。そして、その提案式では、ポアソン比 $\nu > 1/4$ では $k_t < 0$ となり計算が不安定となることを問題点として記述している。Zhaoら³⁾は、連続体を質点系連結格子で表現し、超弾性構成則に基づいて、 k_n 、 k_t と弾性定数の関係式を誘導した後、一軸圧縮などの解析例を報告している。彼らの導いた関係式でも、 $\nu > 1/4$ で $k_t < 0$ となるが、一軸圧縮解析では、質点の連結形式によっては、 $\nu = 0.3$ における解析も可能であったと報告している。

本文では、弾性体内に蓄えられるひずみエネルギーと、ばね連結系内のそれが等価であるとして、弾性係数テンソルと(k_n , k_t)の関係式を示している。その関係式の誘導に際

しては、質点間相対変位量のうち、剛体回転による部分を除去して、ばねに生じる力が純粋変形量のみで算出されている。既往の研究では、剛体回転自体を生じないようにする(つまり、生じないように強制的にモーメントを発生させる)例がみられるが、これでは、応力の対称性が損なわれるなどの問題が発生する²⁾。本研究では、剛体回転角の記述にオイラー角を用いている。Zhaoら³⁾が用いた最小二乗法による変位場の決定と剛体回転量の算出手順に比べ、相対変位から剛体回転分を除去できるだけでなく、回転量を精度よく保存できる、さらには、計算量の軽減などの利点があると考えている。本文では、特に、関係式の誘導過程、および一軸圧縮解析例を示して解析法と係数決定法の性能を記述する。

2. 3次元格子ばね解析法の概要

2.1 質点の運動方程式

本文で用いる3次元格子ばね解析法とは、質点をばねで連結した格子系で解析対象をモデル化し、個々の格子点の運動を追跡する数値解析法である。具体的には、図-1に示す質点間にばねを導入し、個々の質点に対する運動方程式を次のように書く。

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \quad (1)$$

ここに、 m は質量、 c は減衰係数、 f は外力である。陽形式解法を用いると、時刻 t における加速度 \ddot{u}_t は、

$$\ddot{u}_t = \frac{1}{m}(f_t - c\dot{u}_t - ku_t) \quad (2)$$

となる．ここで、 Δt を微小時間増分、 $\dot{u}_{t,av}$ を時間区間 $(t, t+\Delta t)$ の質点の平均速度として、 $t+\Delta t$ の変位 $u_{t+\Delta t}$ は次式で求められる．

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_{t,av} \times \Delta t \quad (3)$$

なお、 $\dot{u}_{t,av}$ は、次のように書くことができる．

$$\dot{u}_{t,av} = \frac{u_t - u_{t-\Delta t}}{\Delta t} + \ddot{u}_t \times \Delta t \quad (4)$$

式(4)を式(3)へ代入すると、

$$u_{t+\Delta t} = 2u_t - u_{t-\Delta t} + \ddot{u}_t \times \Delta t^2 \quad (5)$$

これより変位増分 $\Delta u_t = u_{t+\Delta t} - u_t$ は、次式により直前の変位増分 $\Delta u_{t-\Delta t}$ を用いて求めることができる．

$$\Delta u_t = \Delta u_{t-\Delta t} + \ddot{u}_t \times \Delta t^2 \quad (6)$$

以上から、既知の変位 u_t 、 $u_{t-\Delta t}$ を用いて変位増分と新位置を求められる． Δt 間の加速度は一定として、

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t \times \Delta t + \ddot{u}_t \times \Delta t^2 / 2 \quad (7)$$

とすれば、時刻 t における変位速度は、次式となる．

$$\dot{u}_t = \frac{u_t - u_{t-\Delta t}}{\Delta t} + \ddot{u}_t \times \Delta t / 2 \quad (8)$$

2.2 ばね係数と弾性定数の関係式

本節では、質点連結系内のばねに蓄えられるエネルギーが、対象とする弾性体内のひずみエネルギーに等しく、その勾配が材料の構成則を与える⁴⁾として、ばね係数と弾性定数の関係式を記述する．対象とする材料が、ひずみ e_{ij} と応力 σ_{ij} が、0 (ゼロ) の状態から、ある載荷された状態にある．これを初期状態として、重心位置 $x_i (i=1, 2, 3)$ にある格子点 p の変位 u_i^p を、微小変形の仮定のもと、次のように表す．

$$u_i^p = e_{ij} x_j^p \quad (9)$$

このとき、各格子点間には法線、接線方向の相対変位 ($U_{(n)}$, $U_{(t)}$) が発生しており、ばねには各方向に ($F_{(n)}$, $F_{(t)}$) の力が生じているとして、それらを次式のように与える．

$$F_{(n)} = k_n U_{(n)}, \quad F_{(t)} = k_t U_{(t)} \quad (10)$$

2つの格子点 p_1 と p_2 (図-1 を参照) の連結を m と表記して、法線、接線方向の相対変位を次式のように書く．

$$U_{(n)}^m = \Delta u_i^m I_i^m \quad (11)$$

$$U_{(t)}^m = \Delta u_i^m - U_{(n)}^m I_i^m \quad (12)$$

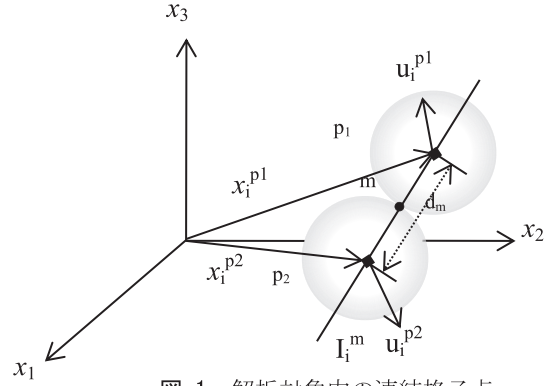


図-1 解析対象内の連結格子点

ここに、 Δu_i^m は全体座標系における相対変位であり、 p_1 , p_2 について書くと次のようになる．

$$\Delta u_i^m = u_i^{p1} - u_i^{p2} = e_{ij} (x_j^{p1} - x_j^{p2}) = e_{ij} d_m I_j^m \quad (13)$$

法線方向の単位ベクトル I_i^m は次式で与えられる．

$$I_i^m = \frac{x_i^{p1} - x_i^{p2}}{d_m} \quad (14)$$

ここに d_m は p_1 と p_2 間のばねの長さである．さて、式(9)の変位は、剛体回転を除去した純粋変形によるものとして表現されている．従って、2.1 の手順から求められる変位 (増分) から、式(13)の Δu_i^m を求めるとき、剛体回転に起因する部分を除去する必要がある．これは、次節に述べることにする．

連結 m に関する力 f_i は次式のように書くことができる．

$$f_i^m = k_n^m \Delta u_j^m I_j^m I_i^m + k_t^m (\Delta u_i^m - \Delta u_j^m I_j^m I_i^m) \quad (15)$$

あるいは、

$$f_i^m = (k_n^m - k_t^m) (e_{kl} I_k^m I_l^m) I_i^m d_m + k_t^m e_{ij} I_j^m d_m \quad (16)$$

式(16)をはじめとして、本節に記載の式には総和規約が適用される．ここで、単位体積当たりのひずみエネルギー Π を次式で表す．

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\Pi_b}{V} = \frac{1}{V} \sum_{m=1}^{N_c} \frac{1}{2} (\Delta u_i^m f_j^m + \Delta u_j^m f_i^m) \\ &= \frac{1}{V} \sum_{m=1}^{N_c} \frac{1}{2} (e_{ij} d_m I_j^m f_j^m + e_{ji} d_m I_i^m f_i^m) \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)より、応力 σ_{ij} は、

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Pi}{\partial e_{ij}} = \frac{1}{2V} \sum_{m=1}^{N_c} (d_m I_i^m f_j^m + d_m I_j^m f_i^m) \quad (18)$$

となる． N_c は格子系内部の総連結数であり、式(18)に式(16)を代入することにより、次のように書くことができる．

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{1}{V} \sum_{m=1}^{N_c} \left(\frac{1}{2} (k_t^m e_{jl} I_l^m I_i^m d_m^2 + k_t^m e_{il} I_l^m I_j^m d_m^2) \right. \\ &\quad \left. + (k_n^m - k_t^m) e_{kl} I_i^m I_j^m I_k^m I_l^m d_m^2 \right) \end{aligned} \quad (19)$$

弾性係数テンソル C_{ijkl} は、

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (20)$$

と表現できることから、式(20)に式(19)を代入することにより、 C_{ijkl} は次のように与えられる。

$$C_{ijkl} = \frac{1}{V} \sum_{m=1}^{N_s} \left[\frac{k_t^m d_m^2}{4} (I_j^m I_k^m \delta_{il} + I_i^m I_k^m \delta_{jl} + I_j^m I_l^m \delta_{ik} + I_i^m I_l^m \delta_{jk}) + (k_n^m - k_t^m) d_m^2 I_i^m I_j^m I_k^m I_l^m \right] \quad (21)$$

ここに、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。そして、ラメの定数(λ, μ)を用いるとき、例えば、 $C_{1111}=C_{2222}=C_{3333}=\lambda+2\mu$ 、 $C_{1122}=C_{2211}=\lambda$ 、 $C_{1212}=C_{2121}=\mu$ であることから、弾性定数とばね係数とが関連付けられる。

2.3 剛体回転とひずみ

連続体内の立方体ブロックに注目して、そのブロック内の変位を次式で書く。なお、以下では、 x_1 - x 、 x_2 - y 、 x_3 - z と対応させる。

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (22)$$

これを、図-1の p_1, p_2 を中心とするブロックに適用して、そして、座標成分ごとに差を求めると次式が得られる。なお、式(13)の下に記載内容に対応するため、 p_1, p_2 の2.1の手順から求められる変位を $(\bar{u}_x^p, \bar{u}_y^p, \bar{u}_z^p)$ などとして、式(9)の表記とは区別している。

$$\begin{pmatrix} \Delta u_1^m \\ \Delta u_2^m \\ \Delta u_3^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_x^{p1} - \bar{u}_x^{p2} \\ \bar{u}_y^{p1} - \bar{u}_y^{p2} \\ \bar{u}_z^{p1} - \bar{u}_z^{p2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & z^{p1} - z^{p2} & -(y^{p1} - y^{p2}) \\ -(z^{p1} - z^{p2}) & 0 & x^{p1} - x^{p2} \\ y^{p1} - y^{p2} & -(x^{p1} - x^{p2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (23)$$

ここに、

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

で、式(23)の右辺第2項が剛体回転に起因する量である。Zhaoら³⁾は、既知の格子点変位に対して最小二乗法を利用して、式(22)中の係数値を求めた後、 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ を算出している。本研究では、図-2に示すオイラー角(θ, ϕ, ψ)を導入している。これにより1つの格子点(質点)は、3個の

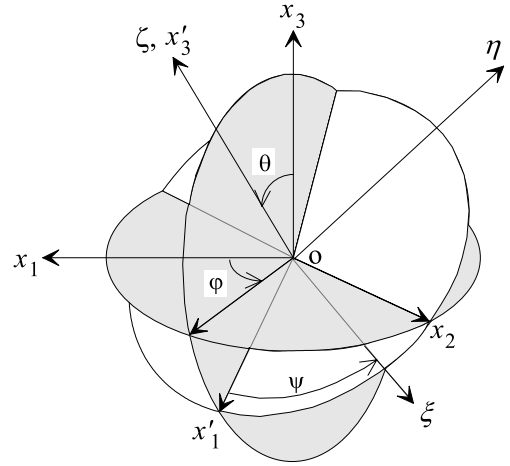


図-2 オイラー角

座標成分と併せて計6の自由度を有することになる。まず、各格子点位置における剛体回転角は、その点が代表する領域の体積と同一体積を有する球の回転として次式により求める。

$$\begin{aligned} I_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} - (I_\eta - I_\zeta) \omega_\eta \omega_\zeta &= N_\xi \\ I_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} - (I_\zeta - I_\xi) \omega_\zeta \omega_\xi &= N_\eta \\ I_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} - (I_\xi - I_\eta) \omega_\xi \omega_\eta &= N_\zeta \end{aligned} \quad (24)$$

ここに、 (I_ξ, I_η, I_ζ) 、 $(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$ 、 (N_ξ, N_η, N_ζ) は、慣性主軸(ξ, η, ζ)に関するそれぞれ慣性モーメント、角速度ならびに力のモーメントである。 (N_ξ, N_η, N_ζ) の計算においては、球中心から作用線までの距離を $d_m/2$ としている。 $(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta) \rightarrow (\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}) \rightarrow (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$ の変換過程の記述は、文献⁵⁾に譲る。なお、 $(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta) - (\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ 関係には特異性が存在するため、後節で述べる片持ちばりの解析では、図-2の $x_3(z)$ 軸と ζ 軸を一致させる条件($\theta=0$)を課した x_1 - x_2 平面内の運動で表現できる変形問題の解析に留めている。

$$\omega_x = (\omega_x^{p1} + \omega_x^{p2}) / 2 \quad (25)$$

として式(23)に用いた。この手法では格子点座標において剛性回転を境界条件として与えることが可能である。

3. 一軸圧縮解析による係数決定法の検討

3.1 格子モデルと解析条件

図-3に示す一辺 d_m の立方体を質点-ばね連結系の最小

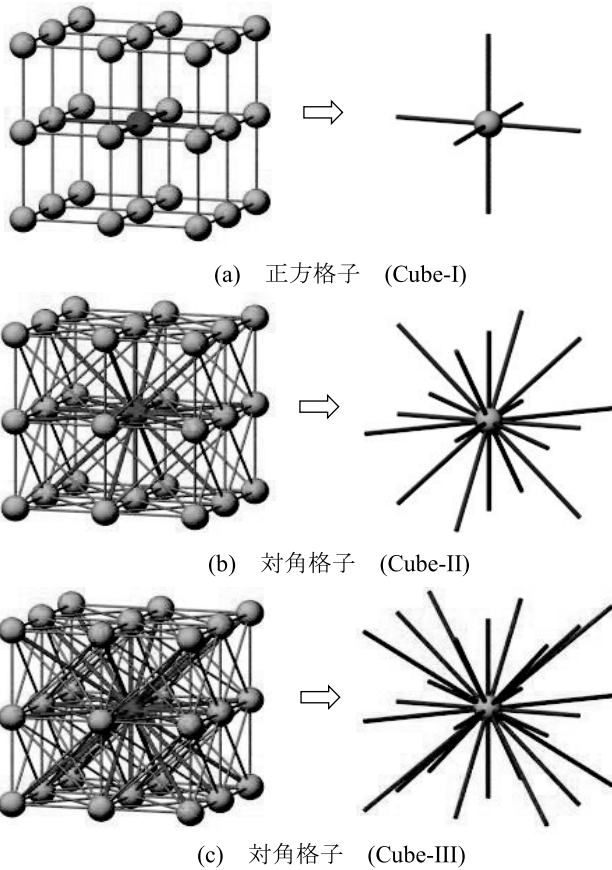


図-3 質点連結格子モデル

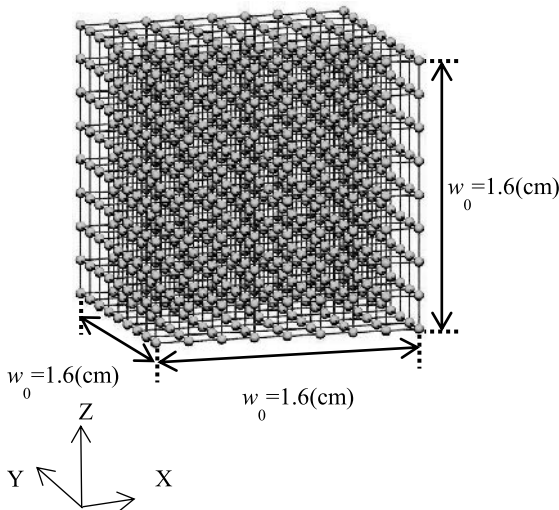


図-4 一軸圧縮解析モデル(Cube-I)

単位として、一軸圧縮や片持ちばりの変形解析で用いる。弾性定数一ばね係数の関係を表す式(21)を用いて求められる (k_n, k_t) に対して、式(2)-(6)の数値解が式(1)の解を表現することを保証する条件として次式を用いた^{3), 6)}。

$$\Delta t < \min \left(\frac{d_m}{c_p} \right) \quad (26)$$

ここに、 c_p は縦波の波速である。減衰に関する項は、式(2)

表-1 接触ばね係数値と一軸圧縮解析結果

Property	Cube	Cube-I	Cube-II	Cube-III
k_n (MN/m)		1.374	0.504	0.253
k_t (MN/m)		1.374	0.172	0.102
E/E_0		0.867	1.022	0.793
ν/ν_0		0	1.023	1.227

(注: $E/E_0, \nu/\nu_0$ は、 $u_z/h_0=0.02$ における計算値)

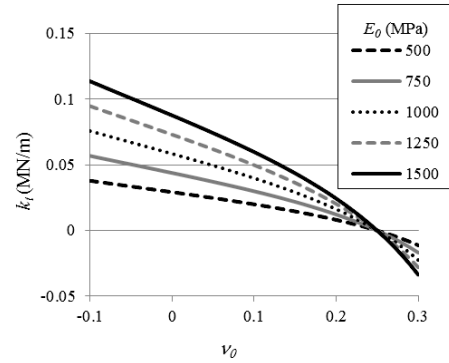


図-5 接線方向ばね係数 k_t の算出結果

を次式のように書き換えて用いた。ただし、式(2)の右辺第3項を無視する。

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{m} \left(\sum f_i - \alpha \cdot \text{sgn}(\dot{u}_i) \left| \sum f_i \right| \right) \quad (27)$$

ここに、 $\text{sgn}(\alpha)$ は、 $\alpha > 0$ の場合、1、 $\alpha < 0$ の場合、-1、そして、 $\alpha = 0$ の場合、0をとる関数である。また、本文の解析では、 $\alpha = 0.8$ とした。

3.2 $\nu_0 < 1/4$ の場合

図-4に示す一辺 $w_0 = 1.6\text{cm}$ の立方体を一軸圧縮モデルとする。なお、ここでは、最縁部の質点間距離として、断面の一辺ならびに高さを表示している。総質点数729個であり、下面($z=0$)の質点に z 方向固定の条件を与えて、上面($z=1.6\text{cm}$)の質点に $\Delta t=1.0 \times 10^{-7}$ secあたり $\Delta u_z=-1.0 \times 10^{-8}\text{cm}$ の強制変位増分を与えて一軸圧縮状態とする。

質点を連結するばねは図-3 (a)の Cube-I を用いるとき、 $d_1 = 0.2\text{cm}$ のみで1944本、図-3 (b)の Cube-II では、 $d_2 = \sqrt{2}/5\text{cm}$ を3456本加えて計5400本で、図-3 (c)の Cube-III では、さらに $d_3 = \sqrt{3}/5\text{cm}$ を2048本加えて計7448本で、それぞれ作成している。この解析で仮定したヤング率 $E=1000\text{MPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.15$ に対する式(21)による (k_n, k_t) の算定値を表-1にまとめる。ここより、解析対象とした物体のヤング率を E_0 、ポアソン比を ν_0 と記載し、ここで述べた解析法により求めた値をそれぞれ E, ν と記載する。また、一軸圧縮解析において、上面変位が $u_z/h_0=0.02$ となったときのヤング率、ポアソン比の計算結果を表-1

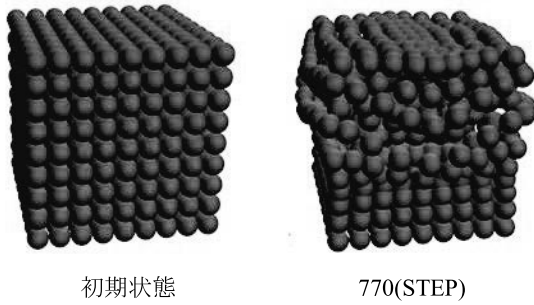


図-6 一軸圧縮解析 ($k_t < 0$ の場合)

に併記した。ヤング率の仮定値 E_0 に対して、Cube-I で、-13%，Cube-II で、+2%，Cube-III で-21%程の値となっている。ポアソン比は、 ν_0 に対して Cube-II で+2%，Cube-III では+23%程の値を得ているが、Cube-I では、载荷軸方向とその直交方向のみにばねを配置しているため、当然のことながら、軸方向圧縮力がその直交方向へ分配されることは無く、 $\nu = 0$ となっている。

3.3 $\nu_0 > 1/4$ の場合

図-3(b)に示す格子 Cube-II のヤング率の入力値として $E_0 = 500, 750, 1000, 1250, 1500(\text{MPa})$ とした k_t の変化を図-5 に示した。図-5 より、接線方向ばね係数は、ヤング率 E_0 に関係なくポアソン比 $\nu_0 > 1/4$ となると負の値となることが確認できる。一方、図-3(b)(c)に示す格子について、式(21)を適用すると次式を得る。

$$k_t = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{(1-4\nu_0)E_0}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)} \quad (28)$$

ここに、 β は、結合方向の方向余弦 I_i^m 、長さ d_m から計算される係数である。この式から示される通り、 $\nu_0 > 1/4$ では、 $k_t < 0$ となることが式表現からも確認できる。

ちなみに、 $E_0=1000(\text{MPa})$ 、 $\nu_0 = 0.30$ とした一軸圧縮解析例を解析結果を図-6 に示す。この図は前記の Δt 当りの変位増分を 770 回分与えたときの解析結果である。この図から $k_t < 0$ となったとき、解析が不安定となることがわかる。

さて、改めて記述するまでもなく、ポアソン比は、一軸状態において、軸ひずみとそれに直交する方向のひずみの比として、実験的に見出された指標とされる⁷⁾。この格子状モデル化では、 k_t の計算値自体は、対角連結の方向余弦に依存することになる。この連結方向を変更すれば、 $\nu_0 > 1/4$ において $k_t > 0$ となり、入力した ν_0 に相当する値が出力されるかも知れない。一方、弾性体を球体の集合体に置き換えるとき、その球体表面が滑らかとの仮定を用いると、 ν は $1/4$ に収束するとの研究もある⁸⁾。誘導過程の検

証を続ける予定である。

4. 結言

本文では、質点や剛体を用いた離散系解析法に用いられるばね係数を弾性定数に基づいて決定することに対して、微小変形の仮定のもと、弾性体内に蓄えられるひずみエネルギーと、ばね連結系内のそれが等価であるとして関係式を誘導した。解析値の設定値に対する差は、解析に用いた3種類の格子において異なっており、Cube-II においてはヤング率、ポアソン比ともに仮定値に対して+2%程の再現となっていた。Cube-I に関しては軸方向圧縮力がその直交方向へ分配されることは無く、 $\nu = 0$ となっている。このことからポアソン比の表現には、斜方向の連結が不可欠であることがわかる。一方、 $\nu_0 > 1/4$ では、接線方向ばね係数が負の値をとり、演算に不安定が生じた。現時点では、この問題を説明する資料を持たないため、今後の課題としたい。

謝辞：本研究の一部は、科学研究費補助金（基盤研究(c), No.26420482）の補助を受けて実施している。

参考文献

- 1) Potyondy D. O & Cundall P. A.: Abonded-particle model for rock, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol.41, No.8, pp.1329-1364, 2004.
- 2) 阿部和久：個別要素法による連続体解析におけるバネ定数の設定，土木学会論文集，No.543，pp.83-90，1996.
- 3) Zhao G.F, Fang, J & Zhao, J.: A 3D distinct lattice spring model for elasticity and dynamic failure, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.35, No.8, pp.859-885, 2011.
- 4) 京谷孝史：よくわかる連続体力学ノート，非線形 CAE 協会，pp.214-217，2008.
- 5) 坂田 勝：工学力学，共立出版，pp.79-82,1977.
- 6) 土木学会編：土木学会編：動的解析と耐震設計【第2巻】動的解析の方法，p.22, 1989.
- 7) 山口柏樹：弾・塑性力学，森北出版，p.42，1976.
- 8) Walton, K.: The effective elastic moduli of a random packing of spheres, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.35. No.2, pp.213-226, 1987.

(2014年6月23日 受付)

