地盤と建設
Vol. 5. No. 1. 1987

圧密過程中の応力やひずみの挙動

BEHAVIOR OF STREES AND STRAIN DURING CONSOLIDATION

熊本直樹* (Naoki Kumamoto)
吉国 洋** (Hiroshi Yoshikuni)

キーワーズ：圧密／応力／沈下／粘性土／バーチカルドレーン／ひずみ／有効応力（IGC : D5）

1. まえがき

圧密に関する解析的研究では，間隙水圧や体積ひずみなどの方向性を持たない量や，境界面の応力や変位に着目することが多く[1]，粘土内部の応力やひずみの挙動はあまり言及されていない。しかし，間隙水圧の挙動が同じでも，応力経路が異なる例がしばしば見られる。例えば立方体の圧密を考えると，立方体の側面の変位を拘束して上端面に荷重を作用させ，上端面からのみ排水させる形式の圧密は，いわゆる一次元圧密で，線形弾性を仮定すれば間隙水圧を未知数とした熱伝導型の圧密方程式で表わされる。このとき，任意点の応力はK_0線上を通過し，この形式の圧密は「K_0圧密」と呼ばれている。ところが，境界面の変形条件を同じにしても（境界面の側方変位を拘束，上端面に載荷），排水を側面からのみに変更すると，間隙水圧や体積ひずみで表わされた圧密方程式は上記「K_0圧密」と全く同じになるが，立方体内部の応力やひずみの挙動は全く異なる。その一例が，著者らがバーチカルドレーン打設地盤を有限要素法で解析するときによく用いている壁状のドレーンによる圧密で，参考文献2)に示したように，壁状ドレーンに近いところ，すなわち排水面近傍では，圧密初期に等方応力が増加し，そのあと偏差応力が増加する。したがって，この形式の圧密は，外見上は境界面の側方変位がなく，上端面のみが沈下するので，一般にはK_0圧密と呼ばれているが，立方体内部の任意点の応力はK_0線上は通過しない。

また，三軸圧密試験においては，円柱周面から排水させることが多いが，このときの円柱内部の応力の挙動も複雑である。例えば，円柱の周面の側方変位を拘束して，上端面のみを沈下させ，周面からのみ排水させる試験を「K_0圧密試験」と称してしばしば実施されているが，実際には粘土内部の応力はK_0線上を通過せず，真の意味のK_0圧密試験ではないことが指摘されている。同様に，バーチカルドレーンによる圧密（中空円柱の圧密）でも，境界面の変形方向と排水方向とが異なるために，K_0圧密と呼ばれている変形条件のときでさえ，中空円柱内部では応力やひずみが複雑に変化する。

著者らは，立方体の圧密，球の圧密，円柱の圧密および中空円柱の圧密を，文献1)，3)，4)，5)などで論じているが，これらはいずれも間隙水圧，体積ひずみあるいは境界面の変位や応力に着目したものであった。そこでこの論文は，以下の事柄を明らかにすることを目的とする。第1の目的は，圧密過程中の粘土内部の成分やひずみの成分を，具体的に示すことである。第2の目的は，上記の現象，すなわち圧密方程式は一次元圧密（K_0圧密）と同じになり，また，外見上は（境界面は）一次元的変形しかしないのに，応力やひずみの挙動が複雑になるメカニズムを明らかにすることである。

この研究は解析的に行うので，数学的取扱いを簡単にするために，粘土骨格は線形弾性と仮定し，透水係数も圧密過程中一定とする。このような仮定は実際の粘土に対しては十分認められるものではないが，排水方向によって応力やひずみの挙動が変化するメカニズムは十分知ることができる。

* 三菱重工業株式会社 技術本部 広島研究所 鉄構・土木研究室
** 工博， 広島大学 教授 工学部 第四類

2．　非回転変形を伴う圧密の方程式とその解

応力やひずみの解を示す前に，間隙水圧および体積ひずみの解を示しておく。粘土骨格の応力ひずみ関係は等方線形弾性とし，微小ひずみの仮定を置く。また，Darcy則が成立するものとし，透水係数は圧密過程中一定とする。さらに，粘土の完全飽和，および粘土粒子・間隙水圧の非圧縮性の仮定を置く。このとき，圧密を静的とみなし，粘土の自重の影響を無視すると，圧密は次の方程式で表わされる[6]。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \mu\ \mathrm{rot}\boldsymbol{\omega} \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで，u，t，c_v，∇^2はそれぞれ，間隙水圧，時間，圧密係数，Laplacian である。圧密係数c_vは

$$c_v = \frac{k}{\gamma_w}(\lambda + 2\mu) = \frac{k}{\gamma_w m_v}$$

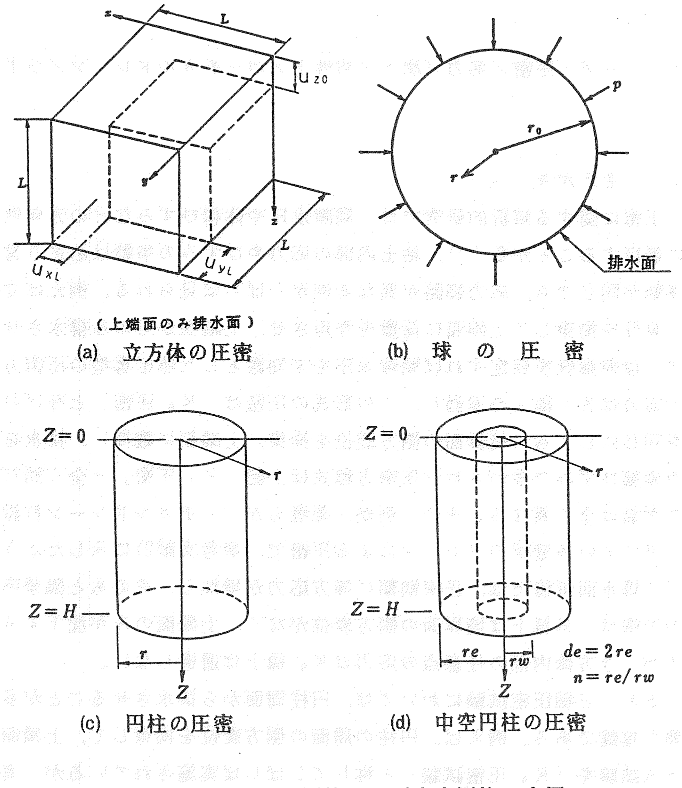
である。ここで，k，γ_w，m_vはそれぞれ，透水係数，間隙水の単位体積重量，体積圧縮係数であり，λ，μはLaméの定数である。また，φは「圧密応力」であり，次式で定義される。

$$\varphi = (\lambda + 2\mu)\, e_v + u \quad \cdots\cdots (3)$$

ここで，e_vは体積ひずみである。式(2)の$\boldsymbol{\omega}$は

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} \quad \cdots\cdots (4)$$

である。ここで，$\boldsymbol{u}$は変位ベクトルである。いま，変形を，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} = 0$，すなわち非回転に限定すると，式(2)から分かるように，$\mathrm{grad}\ \varphi = 0$となり，圧密応力$\varphi$は位置的には定数で，時間のみの関数になる。文献1)，3)，4)，5)などに示しているように，



(a)　立方体の圧密　　(b)　球　の　圧　密

(c)　円柱の圧密　　(d)　中空円柱の圧密

図１　立方体，球，円柱および中空円柱の座標

表１　圧密形式と圧密荷重p及び係数α

圧密形式 ＼ α，p	既知境界値及びp				α
	立方体	球	円柱	中空円柱	
等方圧密	$p_z = \overline{p_x} = \overline{p_y} = p$	p	$p_r = \overline{p_z} = p$	$p_{re} = p_{rw} = \overline{p_z} = p$	$\frac{2(1-2\nu)}{1+\nu}$
K_0圧密（p_z既知型）	$p_z = p$ $u_{xL} = 0$，$u_{yL} = 0$	—	$\overline{p_z} = p$ $u_{r0} = 0$	$\overline{p_z} = p$ $u_{re} = 0$，$u_{rw} = 0$	0
$\varepsilon_z = 0$圧密	$\overline{p_x} = \overline{p_y} = p$ $u_{z0} = 0$	—	$p_r = p$ $u_{z0} = 0$	$p = \frac{n^2}{n^2-1}p_{re} + \frac{-1}{n^2-1}p_{rw}$ $u_{z0} = 0$	$1-2\nu$
中空押し広げ型圧密	—	—	—	$p_{rw} = p$ $u_{z0} = 0$，$u_{re} = 0$	$-\frac{(n^2-1)(1-2\nu)}{(1-2\nu)n^2+1}$

u_{r0}；円柱周面の半径方向変位，　u_{re}，u_{rw}；中空円柱外周面および内周面の半径方向変位，　$n = r_e/r_w$　r_e；中空円柱外周半径，r_w；中空円柱内周半径

非回転変形を伴う圧密の圧密応力φは

$$\varphi=(1+\alpha)\,p-\alpha\overline{u} \quad \cdots\cdots (5)$$

という形で表わされる。ここで，αはポアソン比νの関数で，土塊の変形条件によって定まる係数である。この係数αは，圧密応力φの増加率を意味する。また，pは

$$p=F_x p_x+F_y p_y+F_z p_z \quad \cdots\cdots (6)$$

という形で表わされる。ここで，p_x，p_y，p_z は土塊の境界面に作用させる荷重であり，F_x，F_y，F_z は変形条件によって定まる係数である。荷重pが時間的に一定で，非回転変形を伴う圧密の方程式は，式(1) および式(5) から次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_v \nabla^2 u-\frac{\alpha}{V}\frac{d}{dt}\int_V u\,dV \quad \cdots\cdots (7)$$

ここで，Vは土塊の体積である。ζを位置，τを時間を表わす関数とするとき，式(7) の解は一般に

$$U=\sum_{i=1}^{\infty} C_i\left[D_0(\lambda_i\zeta)-D_0(\lambda_i\zeta)\,\big|_{\zeta=\zeta_p}\right]\exp\left(-\lambda_i^2\tau\right) \quad \cdots\cdots (8)$$

ここに　$U=u/u_0$　（u_0：初期間隙水圧）

ζ_p：排水面

λ_i：固有値

という形で表わされる。また体積ひずみe_vは

$$\frac{e_v}{e_{vf}}=1-\sum_{i=1}^{\infty} C_i D_0(\lambda_i\zeta)\exp\left(-\lambda_i^2\tau\right) \quad \cdots\cdots (9)$$

という形で表わされる。ここで，e_{vf}は最終体積ひずみである。

次に，具体的に解を示す。図１に示すように，立方体，球，円柱および中空円柱の圧密を考える。立方体は，１辺の長さをLとし，上面のみを排水面とする。横方向にx，y座標をとり，鉛直方向にz座標をとる。球の半径はr_0で表し，半径方向にr座標をとる。そして，球の表面を排水面とし，等方的な荷重pを表面に作用させる。円柱の半径はr_0で，半径方向にr座標をとり，周面を排水面とする。中空円柱の内・外周面の半径はそれぞれr_w，r_eで，半

表２　係数　C_i

	C_i
立方体の圧密	$\dfrac{\frac{\alpha}{\lambda_i}\left(\sin\lambda_i-\lambda_i\cos\lambda_i\right)-\cos\lambda_i+1}{\left\{1-\frac{\alpha^2}{\lambda_i^2(1+\alpha)^2}\right\}\frac{1}{4}\sin 2\lambda_i-\sin\lambda_i\cos\lambda_i+\left\{1+\frac{\alpha^2}{\lambda_i^2(1+\alpha)^2}\right\}\frac{\lambda_i}{2}}$
球の圧密	$\dfrac{(1+\alpha)\left(\frac{\sin\lambda_i}{\lambda_i^3}-\frac{\cos\lambda_i}{\lambda_i^2}-\frac{\sin\lambda_i}{3\lambda_i}\right)}{-\frac{\sin\lambda_i\cos\lambda_i}{2\lambda_i^3}+\frac{1}{2\lambda_i^2}-\frac{\sin\lambda_i}{\lambda_i^2}\left(\frac{\sin\lambda_i}{\lambda_i^2}-\frac{\cos\lambda_i}{\lambda_i}\right)}$
円柱の圧密	$\dfrac{2}{\lambda_i\left\{1-\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}\cdot\frac{1}{\lambda_i^2}\right\}J_1(\lambda_i)}$
中空円柱の圧密	$\dfrac{-2\lambda_i D_1(\lambda_i)}{\lambda_i^2 n^2\{D_0(\lambda_i n)\}^2-\left[\lambda_i^2-1+\left\{\frac{2\alpha+(1+\alpha)(n^2-1)}{(1+\alpha)(n^2-1)}\right\}^2\right]\{D_1(\lambda_i)\}^2}$

表３　圧密形式と座標ζ，関数$D_0(\lambda_i\ \zeta)$，排水面の位置ζ_p，時間τ，固有値λ_i

	ζ		$D_0(\lambda_i\zeta)$	ζ_p	τ		λ_i
	ζ	定義			τ	Tの定義	
立方体の圧密	Z	$\frac{z}{L}$	$\frac{1}{\lambda_i}\frac{\alpha}{1+\alpha}\cos\lambda_i Z+\sin\lambda_i Z$	0	T	$\frac{Cvt}{L^2}$	$(1+\alpha)\lambda\cos\lambda-\alpha\sin\lambda=0$ の根
球の圧密	R	$\frac{r}{r_0}$	$\frac{\sin\lambda_i R}{\lambda_i R}$	1	T	$\frac{Cvt}{r_0^2}$	$\left(1-\frac{1+\alpha}{3\alpha}\lambda^2\right)\tan\lambda-\lambda=0$ の根
円柱の圧密	R	$\frac{r}{r_0}$	$J_0(\lambda_i R)$	1	T	$\frac{Cvt}{r_0^2}$	$J_0(\lambda)-\frac{2\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot J_1(\lambda)=0$ の根
中空円柱の圧密	R	$\frac{r}{r_w}$	$J_0(\lambda R)-\frac{J_1(\lambda n)}{Y_1(\lambda n)}Y_0(\lambda R)$	1	$4n^2T$	$\frac{Cvt}{d_e^2}$	$D_0(\lambda)+\frac{2\alpha}{(1+\alpha)(n^2-1)\lambda}D_1(\lambda)=0$ の根

J, Y：Bessel関数　$n=r_e/r_w$　$d_e=2r_e$　D_1：D_0でJ_0, Y_0をJ_1, Y_1と置いたもの

径方向にｒ座標をとる。また，内周面のみが，排水面である。

これらの圧密応力φは，前述のように，式(5) で与えられるが，圧密荷重ｐおよびαは表１に示すとおりである。また，間隙水圧Ｕ（=u/u₀）は式(8) に示すとおりであるが，C_i，λ_i，ζ，$D_0(\lambda_i\zeta)$，ζ_p，τは表２および表３に示すとおりである。また，体積ひずみe_vも式(9) および表２，表３から，具体的に定めることができる。なお，中空円柱の圧密でｎという記号が用いられているが，これは中空円柱の外径と内径の比（つまり，n=de/dw=re/rw)である。

３．　圧密過程中の応力やひずみ

３．１　　立方体の圧密

図１(a)に示す立方体（排水方向はｚ方向のみ）の場合，ひずみは式(10)～式(12)で与えられる。

$$\varepsilon_x = \overline{\varepsilon}_x = \frac{u_{xL}}{L} \tag{10}$$

$$\varepsilon_y = \overline{\varepsilon}_y = \frac{u_{yL}}{L} = \varepsilon_x \qquad (\because\ u_{xL} = u_{yL}) \tag{11}$$

$$\overline{\varepsilon}_z = \frac{u_{z0}}{L} \tag{12}$$

ここで，u_{xL}，u_{yL}，u_{z0}はそれぞれ，x=L，y=L，z=0 の面の変位である。なお，x=0，y=0，z=L の面の変位は０としている。ε_zについては平均値しか与えられていないが，任意点のε_zは

$$\varepsilon_z = e_v - (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = e_v - \frac{2u_{xL}}{L} \tag{13}$$

で与えられる。体積ひずみe_vは式(9) で与えられているので，ε_zは，次のようになる。

$$\varepsilon_z = e_{vf} - \frac{e_{vf}}{1+\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}C_i\left(\frac{\cos\lambda_i}{\sin\lambda_i}\cos\lambda_i Z + \sin\lambda_i Z\right)\exp(-\lambda_i{}^2T) - \frac{2u_{xL}}{L} \tag{14}$$

つまり，u_{xL}（$=u_{yL}$）が判明すれば，式(10)，式(11)および式(14)から任意点のひずみε_x，ε_yおよびε_zを求めることができる。ε_x，ε_y，ε_zが求まれば，式(15)から任意点の応力σ'_x，σ'_y，σ'_zが定まる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma'_x &= (\lambda+2\mu)\,\varepsilon_x + \lambda\,(\varepsilon_y+\varepsilon_z)\\ \sigma'_y &= \lambda\,\varepsilon_x + (\lambda+2\mu)\,\varepsilon_y + \lambda\,\varepsilon_z\\ \sigma'_z &= \lambda\,(\varepsilon_x+\varepsilon_y) + (\lambda+2\mu)\,\varepsilon_z\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

具体的にu_{xL}を求めると，次のようになる。

〈等方圧密の場合〉

$$u_{xL} = \frac{1-\nu}{1+\nu}m_v\,pL\overline{U}_d = \frac{1-2\nu}{E}pL\overline{U}_d \tag{16}$$

〈$\varepsilon_z=0$圧密の場合〉

$$u_{xL} = (1-\nu)\,m_v\,pL\overline{U}_d = \frac{(1+\nu)\,(1-2\nu)}{E}pL\overline{U}_d \tag{17}$$

〈p_z既知型K_0圧密の場合〉

$$u_{xL} = 0 \tag{18}$$

なお，式(16)～式(18)で用いている$\overline{U}_d$は平均圧密度で，具体的には式(8) を用いて，次のようになる。

$$\overline{U}_d = 1-\overline{U} = 1-\sum_{i=1}^{\infty}C_i\frac{1}{\lambda_i}\left[\frac{1}{\lambda_i}\ \frac{\alpha}{1+\alpha}(\sin\lambda_i-\lambda_i)-\cos\lambda_i+1\right]\exp(-\lambda_i{}^2T) \tag{19}$$

式(16)～式(18)からu_{xL}を求めると，式(10)，式(11)，式(14)から任意点のε_x，ε_y，ε_zが，式(15)から任意点のσ'_x，σ'_y，σ'_zが求まる。

なお，蛇足ながら，壁状ドレーンによる圧密の応力やひずみについても考えてみる。柱状のサンドドレーンの理想的なモデルとして内外周面の側方変位を拘束した中空円柱を考えることと同様に，壁状ドレーンによる圧密の理想的なモデルを，境界面の側方変位を拘束した立方体の圧密としよう。そして，$x=0$の面のみを排水面とする。さらに，壁状ドレーンの場合は平面ひずみ条件となるので，立方体内部においても$\varepsilon_y=0$である。つまり，外見（すなわち境界面の変形条件）は図1の立方体のp_z既知型K_0圧密と全く変わらず，排水方向がx方向のみに変わっただけの変形・排水条件のものが，壁状ドレーンの理想モデルの圧密である。この圧密では排水方向がx方向であるので，

$$\varepsilon_z=\overline{\varepsilon}_z=u_{z0}/L \quad (20)$$

$$\varepsilon_y=\overline{\varepsilon}_y=0 \quad (21)$$

$$\overline{\varepsilon}_x=0 \quad (22)$$

である。したがって，平均体積ひずみ$\overline{e}_v$は

$$\overline{e}_v=\overline{\varepsilon}_z=\varepsilon_z \quad (23)$$

であるが，任意点の体積ひずみe_vは

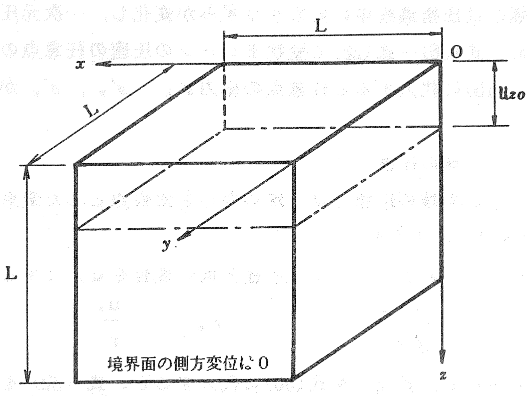
$$e_v=\varepsilon_x+\varepsilon_z=\varepsilon_x+\overline{e}_v \quad (24)$$

である（$\overline{\varepsilon}_x=0$ではあるが，$\varepsilon_x\neq 0$であることに注意されたい。これを間違うと，Barronと同じ誤ちをおかすことになる）。

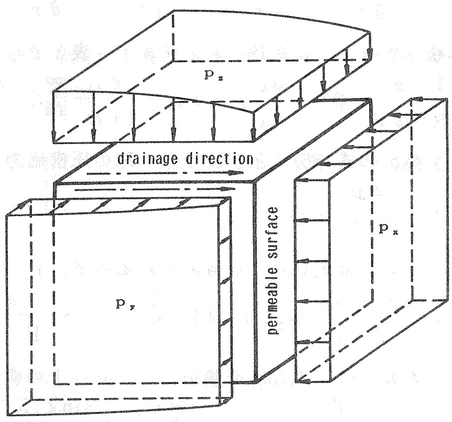
この壁状ドレーンの圧密では，$u_{xL}=u_{yL}=0$であるので，係数αは0になる。そして，排水方向がx方向のみであるので，圧密方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (25)$$

となる。つまり，図1の立方体のK_0圧密のzがxに変わるだけで，圧密方程式の形は全く同じになる。したがって，式(8)および式(9)に示した解のZをX（=x/L）に変更するだけで，式(25)の解が得られる。故に，図2に示す壁状ドレーンの圧密の任意点のひずみε_x，ε_y，ε_zは，式(21)，式(23)，式(24)から次のようになる。



(a) 変形条件



(b) 排水条件

図2 壁状ドレーンの圧密の理想モデル

$$\varepsilon_x=\varepsilon_{zf}\left\{2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_i^2}-\frac{\sin\lambda_i X}{\lambda_i}\right)\exp(-\lambda_i^2T)\right\} \quad (26)$$

$$\varepsilon_y=0 \quad (27)$$

$$\varepsilon_z=\varepsilon_{zf}\left\{1-2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^2}\exp(-\lambda_i^2T)\right\} \quad (28)$$

$z=0$の面で排水させるK_0圧密，すなわち境界面の変形方向と排水方向が一致するK_0圧密の場合は，式(10)，式(11)，式(13)から

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_x=\varepsilon_y=0\\ \varepsilon_z=e_v \qquad (e_v\text{は式(9)で与えられている})\end{array}\right\} \quad (29)$$

であるが，排水方向をx方向に変えただけのK_0圧密では式(26)～式(28)に示すように立方体内部に発生するひずみが大きく異なる。特に，横方向の境界面の変位を拘束しているにもかかわらず，粘土内部ではε_x

（式 (26) ）が発生し，真の意味のK_0圧密になっていない。この壁状ドレーンの圧密方程式は，式(25)に示すように，一次元圧密方程式と全く同じであるが，ひずみ成分（換言すれば応力成分）の挙動は一次元圧密とは全く異なる。したがって，境界面の変位および排水方向が一方向のみであっても，その方向が一致しない場合は圧密過程中に応力やひずみが変化し，一次元圧密とは言えない。

なお，式(26)～式(28)で壁状ドレーンの圧密の任意点のひずみε_x，ε_y，ε_zが与えられるので，これらを式(15)に代入すると任意点の応力σ'_x，σ'_y，σ'_zが得られる。

3．2　球の圧密

図1に示す球の圧密では，球の中心を対称点とした変形が発生する。したがって，体積ひずみe_vは

$$e_v=\varepsilon_r+2\varepsilon_\theta \tag{30}$$

である。ε_rおよびε_θは，半径方向の変位をu_rとするとき

$$\varepsilon_r=-\frac{\partial u_r}{\partial r}\ ,\qquad \varepsilon_\theta=-\frac{u_r}{r} \tag{31}$$

で与えられる。式(31)を式(30)に代入すると，式 (32) を得る。

$$e_v=-\frac{\partial u_r}{\partial r}-2\frac{u_r}{r}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2u_r)}{\partial r} \tag{32}$$

一方，体積ひずみe_vは式(9) および表1～表3で与えられているので，$R=r/r_0$とすると

$$-\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{u_r}{r_0}\right)=e_{vf}-\frac{e_{vf}}{1+\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}C_i\frac{\sin\lambda_iR}{\lambda_iR}\exp(-\lambda_i{}^2T) \tag{33}$$

を得る。文献5)の式(36)に示すように，球の圧密応力φは

$$\varphi=p-\frac{4\mu}{r_0}u_{r0} \tag{34}$$

であるが，このφは式(5) でも与えられるので，$R=1$（$r=r_0$：球の表面）の変位u_{r0}は

$$u_{r0}=-\frac{1-\nu}{1+\nu}m_vpr_0(1-\overline{U})=-\frac{1-2\nu}{E}pr_0(1-\overline{U})\qquad(\overline{U}=u/u_0) \tag{35}$$

である。したがって，式(33)を積分して，$R=1$の変位が式(35)になるように積分定数を定めると

$$\frac{u_r}{r_0}=e_{vf}\left\{-\frac{R}{3}+\frac{1}{(1+\alpha)R^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{\lambda_i}\left(\frac{\sin\lambda_iR}{\lambda_i{}^2}-\frac{R\cos\lambda_iR}{\lambda_i}\right)\exp(-\lambda_i{}^2T)\right\} \tag{36}$$

となる。故に，ε_rおよびε_θは次のようになる。

$$\frac{\varepsilon_r}{e_{vf}}=\frac{1}{3}+\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{(1+\alpha)R^3}\frac{C_i}{\lambda_i}\left(\frac{\sin\lambda_iR}{\lambda_i{}^2}-\frac{R\cos\lambda_iR}{\lambda_i}\right)-\frac{C_i}{1+\alpha}\frac{\sin\lambda_iR}{\lambda_iR}\right\}\exp(-\lambda_i{}^2T) \tag{37}$$

$$\frac{\varepsilon_\theta}{e_{vf}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{(1+\alpha)R^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{\lambda_i}\left(\frac{\sin\lambda_iR}{\lambda_i{}^2}-\frac{R\cos\lambda_iR}{\lambda_i}\right)\exp(-\lambda_i{}^2T) \tag{38}$$

ε_rおよびε_θが式(37)および式(38)から求まるので，任意点の応力σ'_rおよびσ'_θは次のようになる。

$$\sigma'_r=(\lambda+2\mu)e_v-4\mu\varepsilon_\theta \tag{39}$$

$$\sigma'_\theta=(\lambda+2\mu)e_v-2\mu(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta) \tag{40}$$

3．3　円柱の外向き放射流れによる圧密

体積ひずみe_vは

$$e_v=\varepsilon_z+\varepsilon_r+\varepsilon_\theta \tag{41}$$

である。外向き放射流れのみによる圧密で，非回転の変形を仮定しているので，鉛直ひずみε_zは

$$\varepsilon_z=\overline{\varepsilon_z}=u_{z0}/H \tag{42}$$

である。ここで，u_{z0}は円柱上端面の変位で，Hは円柱の高さである。一方，（$\varepsilon_r+\varepsilon_\theta$）は

$$\varepsilon_r+\varepsilon_\theta=-\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)\quad (u_r：半径方向変位) \tag{43}$$

である。したがって，体積ひずみe_vは式(42)および式(43)で与えられるが，さらに式(9)を用いると

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{u_r}{r_0}\right)=e_{vf}-\frac{e_{vf}}{1+\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}C_i J_0(\lambda_i R)\exp(-\lambda_i^2 T)-\varepsilon_z \tag{44}$$

となる。ここで，$R=r/r_0$である。式(44)を$R=1$（$r=r_0$）で$u_r=u_{r0}$に注意して積分すると

$$\frac{u_r}{r_0}=-\frac{e_{vf}(R-1)}{2}+\frac{e_{vf}}{1+\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{\lambda_i}\{J_1(\lambda_i R)-J_1(\lambda_i)\}\exp(-\lambda_i^2 T)+\frac{\varepsilon_z(R-1)}{2}+\frac{u_{r0}}{r_0} \tag{45}$$

を得る。したがって，ε_r，ε_θは次のようになる。

$$\varepsilon_r=\frac{e_{vf}(R+1)}{2R}-\frac{\varepsilon_z(R+1)}{2R}+\frac{u_{r0}}{r_0 R}+\frac{e_{vf}}{(1+\alpha)R}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{C_i}{\lambda_i}\{J_1(\lambda_i R)-J_1(\lambda_i)\}-C_i R J_0(\lambda_i R)\right]\exp(-\lambda_i^2 T) \tag{46}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{e_{vf}(R-1)}{2R}-\frac{e_{vf}}{(1+\alpha)R}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{\lambda_i}\{J_1(\lambda_i R)-J_1(\lambda_i)\}\exp(-\lambda_i^2 T)-\frac{\varepsilon_z(R-1)}{2R}-\frac{u_{r0}}{r_0 R} \tag{47}$$

なお，式(46)，式(47)に含まれるε_zとu_{r0}は圧密形式によって異なり，具体的には次のようになる。

〔p_z既知型K_0圧密〕

$$\varepsilon_z=e_{vf}\left(1-\frac{\overline{u}}{u_0}\right) \tag{48}$$

$$u_{r0}=0 \tag{49}$$

〔等方圧密〕

$$\varepsilon_z=\frac{e_{vf}}{3}\left(1-\frac{\overline{u}}{u_0}\right) \tag{50}$$

$$u_{r0}=-\frac{e_{vf}R}{3}\left(1-\frac{\overline{u}}{u_0}\right) \tag{51}$$

〔$\varepsilon_z=0$圧密〕

$$\varepsilon_z=\frac{u_{z0}}{H}=0 \tag{52}$$

$$u_{r0}=-\frac{e_{vf}R}{2}\left(1-\frac{\overline{u}}{u_0}\right) \tag{53}$$

式(46)～式(53)から，各圧密形式の円柱の任意点のひずみε_r，ε_θ，ε_zが求まるので，任意点の応力，σ'_r，σ'_θ，σ'_zは，次式から求めることができる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma'_r&=\lambda\varepsilon_z+(\lambda+2\mu)+\varepsilon_r+\lambda\varepsilon_\theta\\ \sigma'_\theta&=\lambda(\varepsilon_z+\varepsilon_r)+(\lambda+2\mu)\varepsilon_\theta\\ \sigma'_z&=(\lambda+2\mu)\varepsilon_z+\lambda(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta)\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

3．4　中空円柱の圧密

ここでは，中空円柱の等方圧密およびK_0圧密を取り扱う。

〔等方圧密〕

内向き放射流れのみと仮定しているので，円柱の圧密と同様に，体積ひずみe_vおよび鉛直ひずみε_zは式(41)および式(42)で与えられる。また，（$\varepsilon_r+\varepsilon_\theta$）も円柱の圧密と同様に式(43)で与えられ，等方圧密のε_zは式(50)である。したがって，式(41)，式(43)，式(50)および式(9)から次式を得る。

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{u_r}{r_w}\right)=e_{vf}\left[\frac{2}{3}-\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{C_i}{1+\alpha}D_0(\lambda_i R)+\frac{2C_i D_1(\lambda_i)}{3(1+\alpha)(n^2-1)\lambda_i}\right\}\exp(-4\lambda_i^2 n^2 T)\right] \tag{55}$$

ここで，　$R=r/r_w$（r_w：内周面半径）　である。等方圧密であるので，$u_{re}/r_e=u_{rw}/r_w$である[1]。したがって，式(55)を積分し，$u_{re}/r_e=u_{rw}/r_w$となるように積分定数を定めると，変位u_rは式(56)のようになる。

$$-R\frac{u_r}{r_w}=e_{vf}\left[\frac{R^2}{3}-\frac{1}{1+\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{\lambda_i}\left\{RD_1(\lambda_i R)+\frac{nD_1(\lambda_i n)-n^2D_1(\lambda_i)}{n^2-1}+\frac{R^2D_1(\lambda_i)}{3(n^2-1)}\right\}\exp(-4\lambda_i^2 n^2 T)\right] \tag{56}$$

故に，ε_r，ε_θは次のようになる。

$$\frac{\varepsilon_r}{e_{vf}}=\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{1+\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{\lambda_i}\left\{\lambda_i D_0(\lambda_i R)-\frac{1}{R}D_1(\lambda_i R)-\frac{nD_1(\lambda_i n)-n^2D_1(\lambda_i)}{R^2(n^2-1)}+\frac{D_1(\lambda_i)}{3(n^2-1)}\right\}\exp(-4\lambda_i^2 n^2 T)\right]$$

…………………… (57)

$$\frac{\varepsilon_\theta}{e_{vf}}=\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{1+\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{\lambda_i}\left\{\frac{1}{R}D_1(\lambda_i R)+\frac{nD_1(\lambda_i n)-n^2D_1(\lambda_i)}{R^2(n^2-1)}+\frac{D_1(\lambda_i)}{3(n^2-1)}\right\}\exp(-4\lambda_i{}^2n^2T)\right] \quad \cdots\cdots (58)$$

また，ε_z は，式(50)および式(8) から，次のようになる。

$$\frac{\varepsilon_z}{e_{vf}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3(1+\alpha)(n^2-1)}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{\lambda_i}D_1(\lambda_i)\exp(-4\lambda_i{}^2T) \quad \cdots\cdots (59)$$

〔K₀ 圧密〕

等方圧密と異なる点は，鉛直ひずみ ε_z が式(48)で与えられることである。したがって，式(55)に相当する式は，次のようになる。

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{u_r}{r_w}\right)=-e_{vf}\sum_{i=1}^{\infty}C_i\left\{D_0(\lambda_i R)+\frac{2}{n^2-1}\frac{1}{\lambda_i}D_1(\lambda_i)\right\}\exp(-4\lambda_i{}^2n^2T) \quad \cdots\cdots (60)$$

式(60)を導く過程において，K₀ 圧密であるので，$\alpha=0$ としている。式(60)を $u_{re}=0$，$u_{rw}=0$ に着目して積分すると

$$R\frac{u_r}{r_w}=e_{vf}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{\lambda_i}\left\{RD_1(\lambda_i R)-\frac{n^2-R^2}{n^2-1}D_1(\lambda_i)\right\}\exp(-4\lambda_i{}^2n^2T) \quad \cdots\cdots (61)$$

を得る。したがって，ε_r，ε_θ は次のようになる。

$$\frac{\varepsilon_r}{e_{vf}}=-\sum_{i=1}^{\infty}C_i\left[\frac{1}{\lambda_i R^2}\left\{RD_1(\lambda_i R)-\frac{n^2-R^2}{n^2-1}D_1(\lambda_i)\right\}-\left\{D_0(\lambda_i R)+\frac{2}{n^2-1}\frac{1}{\lambda_i}D_1(\lambda_i)\right\}\right]\times\exp(-4\lambda_i{}^2n^2T) \quad \cdots\cdots (62)$$

$$\frac{\varepsilon_\theta}{e_{vf}}=-\frac{1}{R^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{\lambda_i}\left\{RD_1(\lambda_i R)-\frac{n^2-R^2}{n^2-1}D_1(\lambda_i)\right\}\exp(-4\lambda_i{}^2n^2T) \quad \cdots\cdots (63)$$

また，ε_z は，式(48)および式(8) から，次のようになる。

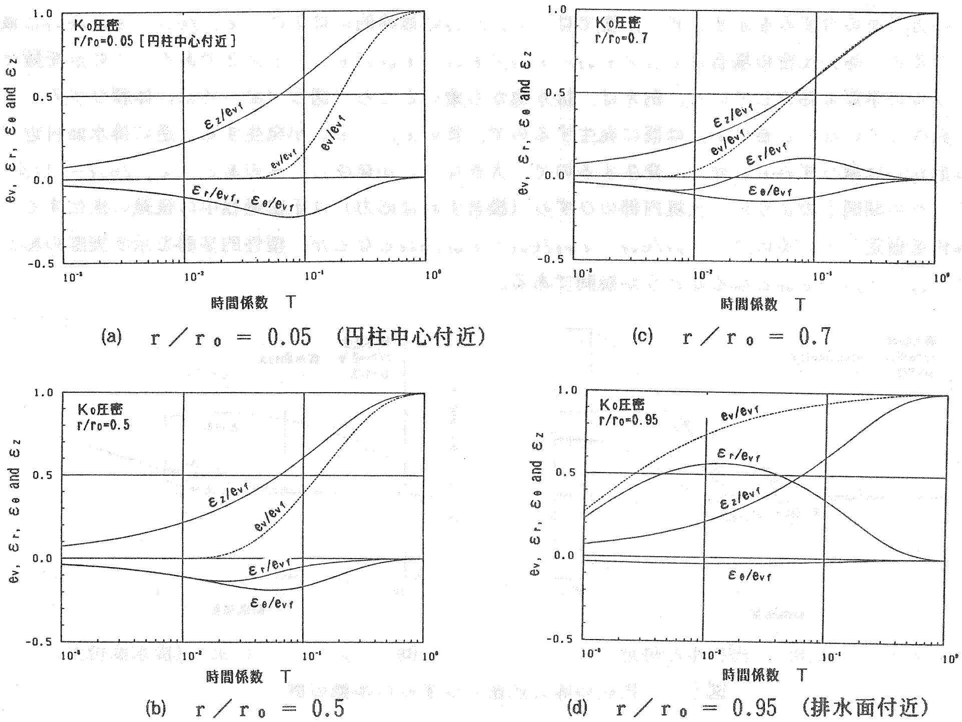
$$\frac{\varepsilon_z}{e_{vf}}=1+\frac{2}{n^2-1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{\lambda_i}D_1(\lambda_i)\exp(-4\lambda_i{}^2n^2T) \quad \cdots\cdots (64)$$

以上に，等方圧密及びK₀ 圧密の中空円柱内部のひずみ ε_r，ε_θ，ε_z を示したが，他の形式の圧密についても同様に検討できる。また，任意点のひずみが判明すれば，任意点の応力 σ'_r，σ'_θ，σ'_z は式(54)で求めることができる。

4．計算例および考察

4．1　K₀ 圧密の応力とひずみ

境界面の横方向の変位を拘束し，上端面のみが沈下する形式の圧密を，一般に「K₀ 圧密」と呼んでいる。ところが排水方向と境界面の変位方向とが異なる場合は，粘土内部には横方向のひずみが発生し，真の意味のK₀ 圧密にはならない。このような圧密としては，壁状ドレーンによる圧密，円柱のK₀ 圧密，中空円柱のK₀ 圧密（サンドドレーンの圧密）などがある。そこで，このような圧密の例として，円柱のK₀ 圧密のひずみおよび応力経路を，図3および図4に示す。図3をみると，K₀ 圧密にもかかわらず，円柱内部では ε_r および ε_θ が発生している。このようなひずみが発生するメカニズムは，次のようである。体積ひずみ e_v は，排水面に近いところが速く発生し，排水面から遠いところが遅く発生する。ところが，非回転変形を仮定しているので，いわゆる等ひずみ条件になっており，円柱のいたるところで鉛直ひずみ ε_z は等しい。したがって，圧密のごく初期を考えると，排水面付近では体積ひずみ e_v はかなり発生するが ε_z はまだあまり発生していないために，（$\varepsilon_r+\varepsilon_\theta$）が発生せざるを得ない。一方，排水面から遠いところの圧密のごく初期を考えると，体積ひずみがあまり発生していないのに ε_z は発生しているので，結局負の（$\varepsilon_r+\varepsilon_\theta$）が発生する。つまり，境界面の横方向変位を拘束しているが，粘土内部では等ひずみ条件と体積ひず



(a) r／r₀ ＝ 0.05 (円柱中心付近)　(c) r／r₀ ＝ 0.7

(b) r／r₀ ＝ 0.5　(d) r／r₀ ＝ 0.95 (排水面付近)

図３　円柱のK₀圧密のひずみの挙動

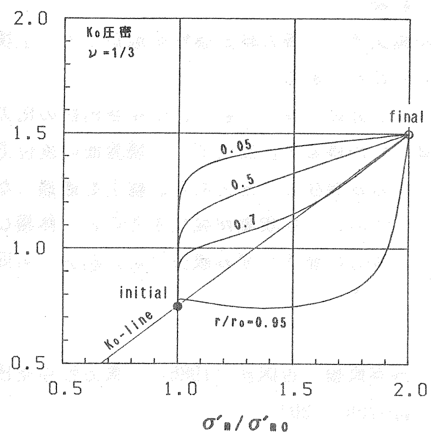


図４．円柱のK₀圧密の応力経路の例

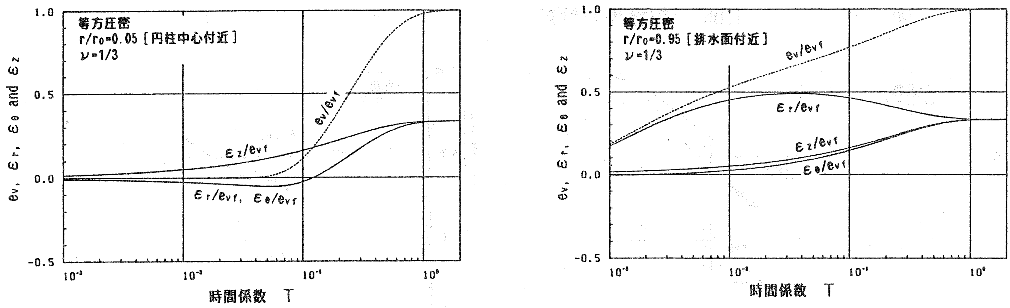
みの関係から横方向の変位が発生するのである。

初期応力がσ'_{z0}＝1 tf/m², K₀=0.5(ν＝1/3)の円柱に$\overline{p_z}$＝1.0 tf/m²の荷重を作用させたときの応力経路を示したものが図４でる。円柱内の応力はK₀線上を通過せず，排水面に近いところは，初期には等方応力が増加し，後期に偏差応力が増加する。排水面から遠いところはこの逆である。このような応力経路になる理由は，図３から直ちに理解できる。例えば排水面から遠いところでは，初期には体積ひずみは殆ど発生せず，正のε_zと負のε_r，ε_θが発生する。したがって，この位置では平均有効応力σ'_mが増加せず，偏差応力のみが増加する。一方，排水面に近いところでは，圧密初期から体積ひずみが発生し，ε_rもよく発生するので，偏差応力はあまり変化せず平均有効応力が増加する。このような現象が発生する原因は，排水方向と境界面の変形方向が異なるため，つまり，体積ひずみは横方向に分布し，土塊全体で等しいε_zが発生するためである。したがって，同じような変形および排水条件である，壁状ドレーンのK₀圧密及び中空円柱のK₀圧密（サンドドレーンの圧密）でも図４に類似したような応力経路になる。

なお，この論文では粘土は等方線形弾性と仮定しているので，最終的には土塊の至るところでε_r＝0，ε_θ＝0となり，応力もK₀線上に戻る。しかし，実際の粘土は塑性的挙動を示すので，ε_rやε_θが0に戻ったり，応力がK₀線上に戻ったりすることはないのではないかと思われる。

4．2　等方圧密のひずみ

図5に等方圧密のひずみを示す。K_0 圧密では　ε_z/e_{vf}は最終的には1に，ε_r/e_{vf}，$\varepsilon_\theta/e_{vf}$は最終的に0になるが，等方圧密の場合は$\varepsilon_{zf}/e_{vf}=\varepsilon_{rf}/e_{vf}=\varepsilon_{\theta f}/e_{vf}=1/3$である。この点を除けば，両者のひずみの挙動は類似している。例えば，排水面から遠いところ（図5（a））では，体積ひずみe_vがまだ殆ど発生していないときにε_zは既に発生するので，負のε_r，ε_θが発生する。逆に排水面付近では，圧密の早期から体積ひずみe_vがよく発生するので，大きなε_rが発生し，そのあと　$\varepsilon_r/e_{vf}=1/3$へと減小する。その間図5のように，土塊内部のひずみ（換言すれば応力）は圧密過程中に複雑に変化する。等方線形弾性を仮定しているので，$\varepsilon_{zf}/e_{vf}=\varepsilon_{rf}/e_{vf}=\varepsilon_{\theta f}/e_{vf}$となるが，塑性的挙動を示す実際の粘土で最終的に$\varepsilon_{zf}=\varepsilon_{rf}=\varepsilon_{\theta f}$となるかどうか疑問である。



(a)　$r/r_0=0.05$（円柱中心付近）　　(b)　$r/r_0=0.95$（排水面付近）

図5　　円柱の等方圧密のひずみの挙動の例

5．結論

本論文では，等方線形弾性を仮定して，土塊内部の応力やひずみの挙動を検討した。その主要な結論は，次のとおりである。

(1)　立方体，球，円柱および中空円柱の応力およびひずみの成分を表わす式を導出し，本文に示した。

(2)　いわゆるK_0圧密でも，境界面の変位方向と排水方向が異なる場合には土塊内部に横方向の変位やひずみが発生し，応力もK_0線上を通過しない。したがって，真の意味のK_0圧密ではない。

(3)　このような現象が発生するのは，体積ひずみの分布とε_zの分布が異なるためである。

(4)　等方圧密のひずみ成分（応力成分）も同じ理由から複雑な挙動を示す。

参　考　文　献

1)　熊本直樹，吉国洋（1986）：異方性中空円柱の圧密，土木学会論文報告集，第 370号／Ⅲ－5，pp.199～ 207

2)　熊本直樹，吉国洋（1986）：バーチカルドレーンを打設した地盤の有限要素法による計算方法，地盤と建設（土質工学会中国支部論文報告集），Vol. 4，No. 1，pp.43　～ 52

3)　Kumamoto, N. and H. Yoshikuni (1981)："A key to solution of the irrotational consolidation and its application to cylindrical clay", Soils and Foundations, Vol. 21, No. 2, pp 35　～ 46

4)　Yoshikuni, H. and N. Kumamoto (1984)："Study on the irrotational consolidation", Mitsubishi Heavy Industries, Ltd., TECHNICAL REVIEW, Vol. 21, No. 2, pp.87～ 95

5)　熊本直樹，吉国洋（1985）：非回転圧密への圧密応力の適用，地盤と建設（土質工学会中国支部論文報告集），Vol. 3，No. 1，pp. 1 ～ 10

6)　吉国洋（1973）：多次元圧密とその軸対称問題への適用，東京工業大学学位論文